

Murilo Reolon Scuzziato

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS PARA O
PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO
ELETROENERGÉTICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Elétrica
Orientador: Prof. Dr. Erlon Cristian
Finardi

Florianópolis
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Scuzziato, Murilo Reolon

MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS PARA
O PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO
ELETROENERGÉTICA / Murilo Reolon Scuzziato ; orientador,
Erlon Cristian Finardi - Florianópolis, SC, 2016.
212 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Sistemas hidrotérmicos. 3.
Programação Diária da Operação Eletroenergética. 4. Alocação
de unidades geradoras. 5. Otimização. I. Finardi, Erlon
Cristian. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Murilo Reolon Scuzziato

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS
ESTÁGIOS PARA O PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO
DIÁRIA DA OPERAÇÃO ELETROENERGÉTICA**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, área de concentração Sistemas de Energia Elétrica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 12 de agosto de 2016

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr. sc. ETH
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr. - Orientador - UFSC

Prof. André Luiz Diniz Souto Lima, Dr. - CEPEL

Prof.^a Claudia Alejandra Sagastizábal, D. Habil - IMPA

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D. - UFSC

Prof. Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa, Dr. - IFSC

Prof. Rafael Nilson Rodrigues, Dr. - IFSC

AGRADECIMENTOS

Os estudos apresentados nessa tese foram desenvolvidos no Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (LabPlan), para o curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Durante os anos dedicados à este trabalho recebi auxílios relacionado tanto à questões técnicas como também pessoais. Portanto gostaria de aproveitar a oportunidade e agradecer a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma. Para algumas delas destaco meus agradecimentos.

Ao Prof. *Erlon Cristian Finardi*, exemplar professor, pesquisador e orientador, pela oportunidade oferecida, ensinamentos, amizade, paciência e constante apoio durante todo o trabalho.

À Prof^a. *Claudia Alejandra Sagastizábal* pelas importantes sugestões e contribuições durante toda a execução do trabalho, e especialmente por ter aceitado ser a relatora do trabalho e por toda a ajuda cedida na realização do doutorado sanduíche.

Ao Prof. *Antonio Frangioni* por ter supervisionado o doutorado sanduíche e contribuído imensamente com as ideias e execuções dos estudos elaborados.

Aos demais membros da banca avaliadora pela disposição e sugestões para a versão final deste trabalho: ao Prof. *André Luiz Diniz Souto Lima*, pela valorosa conversa e sugestões; ao Prof. *Fabício Yutaka Kuwabata Takigawa*, pela minuciosa correção e discussões; ao Prof. *Rafael Nilson Rodrigues* pelos comentários e contribuições; e ao Prof. *Eduardo Camponogara* pelas sugestões. Também ao Prof. *Antonio José Alves Simões Costa* pelas contribuições na etapa de qualificação deste trabalho.

Ao Prof. *Edson Luiz da Silva*, pelo incentivo, ensinamentos e discussões durante o período de pós-graduação.

Aos demais professores do LabPlan e do Laboratório de Sistemas de Potência (Labspot) pela dedicação à docência e conhecimentos transmitidos contribuindo para a minha formação.

Destaco TODAS as amizades dos colegas de laboratório e do programa de pós-graduação realizadas nesse período. Assim como os demais amigos de longa data que sempre me auxiliaram e apoiaram.

À minha família, cuja orientação e educação criaram condições para eu chegar até aqui. Ao meu pai, *Moacir Jovino Scuzziato*, minha mãe, *Miriam Salete Reolon Scuzziato*, e meus irmãos *Robson Reolon Scuzziato* e *Vinicius Reolon Scuzziato*, pelo incentivo, apoio e carinho.

Agradecimento especial a minha companheira, melhor amiga e parceira amada, *Michelle Menezes Rampinelli*, pelo carinho, paciência e todo suporte para tornar esse período de trabalho ainda melhor.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro concedido para realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma análise comparativa de diferentes estratégias de decomposição aplicadas na resolução do problema da programação de unidades geradoras. A programação diária da operação eletroenergética é modelada como um problema de otimização estocástica de dois estágios, em que as incertezas são relacionadas à demanda e à afluência incremental das usinas hidrelétricas. As estratégias de decomposição são baseadas na Relaxação Lagrangiana (RL). Por sua vez, na recuperação primal utilizam-se heurísticas que combinam as soluções dos subproblemas da RL com aproximações da função de custo futuro. Diferentes estratégias de decomposição são avaliadas utilizando-se duas abordagens distintas, decomposição por cenários e decomposição espacial. Para avaliar cada uma das metodologias utiliza-se um grupo de sistemas hidrotérmicos variados, com número de usinas e capacidade de produção diferentes entre si.

Palavras chave: Sistemas hidrotérmicos, programação diária da operação eletroenergética, alocação de unidades geradoras, otimização estocástica de dois estágios, relaxação Lagrangiana, métodos de decomposição

ABSTRACT

This work presents a comparative analysis for different decomposition strategies used to solve the Unit Commitment (UC) problem subject to uncertain demand and water inflows. The methods are applied in hydrothermal systems and the day ahead scheduling is modeled as a two-stage stochastic optimization problem. The solution strategies are based on the Lagrangian Relaxation (LR) approach, using the scenario and the space decomposition schemes. On the other hand, the primal recovery phase uses heuristics that combine the solution of the LR subproblems and a cost to go function. The methods are assessed not only in cases similar to the Brazilian electrical power system but also in various configurations of thermal and hydro power plants, with different proportion in number of units and generation capacity.

Keywords: Hydrothermal systems, stochastic unit commitment, two-stage stochastic optimization, mixed-binary linear program, Lagrangian relaxation, Lagrangian decomposition

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação da decomposição dual via RL.....	38
Figura 2: Árvore de Cenários.....	45
Figura 3: Representação por cenários e não antecipatividade (linhas em pontilhado).....	46
Figura 4: Árvore de cenários de dois estágios.....	47
Figura 5: Função de produção de um grupo de unidades geradoras.....	62
Figura 6: Função de produção de um grupo de unidades geradoras com volumes fixos.....	62
Figura 7: Ilustração do conjunto de hiperplanos da <i>fphg</i>	63
Figura 8: Função de produção de um grupo de unidades geradoras (linearizada).....	64
Figura 9: Função de custo de operação de uma termelétrica.....	66
Figura 10: Aproximação linear por partes para a função de custo de operação de uma termelétrica.....	68
Figura 11: Ilustração das decomposições dual e primal.....	84
Figura 12: Ilustração da decomposição espacial e por cenários.....	86
Figura 13: Ilustração das variações de decomposição espacial.....	87
Figura 14: Conjunto de restrições para a SpcDec1.....	88
Figura 15: Conjunto de restrições para a SpcDec2.....	93
Figura 16: Conjunto de restrições para a SpcDec3.....	95
Figura 17: Conjunto de restrições para a ScnDec.....	98
Figura 18: Algoritmo da RL.....	102
Figura 19: Uso de componentes simples na resolução do problema dual.....	107
Figura 20: Decomposição dos subproblemas na RP.....	110
Figura 21: Uma iteração da heurística.....	112
Figura 22: Uma iteração da RP considerando a recursão regressiva... ..	115
Figura 23: Interação entre as recursões progressiva e recursiva.....	115
Figura 24: Algoritmo de solução.....	116
Figura 25: Usinas hidrelétricas dos casos teste.....	121
Figura 26: Sistema de transmissão.....	122
Figura 27: Perfil de curva de demanda.....	124
Figura 28: Perfil de curva de demanda.....	126
Figura 29: Ilustração das curvas do perfil de desempenho.....	128

Figura 30: Perfil de desempenho para a SpcDec2 com e sem componentes simples.	129
Figura 31: Perfil de desempenho para a SpcDec3 com e sem componentes simples.	129
Figura 32: Perfil de desempenho (número de iterações) da RL - determinístico.	131
Figura 33: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RL - determinístico.	131
Figura 34: Perfil de desempenho (valor da função dual) da RL - determinístico.	132
Figura 35: Convergência da RL com SpcDec1 para o sistema Aa.	134
Figura 36: Convergência da RL com SpcDec2 para o sistema Aa.	135
Figura 37: Convergência da RL com SpcDec3 para o sistema Aa.	135
Figura 38: Perfil de desempenho (número de iterações) da RL - estocástico.	136
Figura 39: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RL - estocástico.	136
Figura 40: Perfil de desempenho (valor da função dual) da RL - estocástico.	137
Figura 41: Convergência da RL com todas estratégias para o sistema A9a.	139
Figura 42: Perfil de desempenho dos ajustes da RP – casos determinísticos.	144
Figura 43: Perfil de desempenho dos ajustes da RP para a estratégia SpcDec3 – casos estocásticos.	148
Figura 44: Perfil de desempenho dos ajustes da RP para a estratégia ScnDec – casos estocásticos.	148
Figura 45: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RP – casos determinísticos.	152
Figura 46: Perfil de desempenho (custo de operação) da RP – casos determinísticos.	153
Figura 47: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Am1,1.	153
Figura 48: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Bm1,1.	153
Figura 49: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Cm1,1.	154

Figura 50: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Dm1,1.	154
Figura 51: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Em1,1.	154
Figura 52: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RP – casos estocásticos.	159
Figura 53: Perfil de desempenho (custo esperado de operação) da RP – casos estocásticos.	160
Figura 54: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Am25.	160
Figura 55: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Bm25.	161
Figura 56: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Cm25.	161
Figura 57: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Dm25.	161
Figura 58: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Em25.	162
Figura 59: Média do <i>gap4</i> com relação ao número de cenários.	163
Figura 60: Média do <i>gap5</i> com relação ao número de cenários.	163
Figura 61: Comparação dos custos esperados de operação.	166
Figura 62: Curva de geração e demanda - caso Am25.	168
Figura 63: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Am25.	168
Figura 64: Curva de geração e demanda - caso Bm25.	169
Figura 65: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Bm25.	169
Figura 66: Curva de geração e demanda - caso Cm25.	170
Figura 67: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Cm25.	170
Figura 68: Curva de geração e demanda - caso Dm25.	171
Figura 69: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Dm25.	171
Figura 70: Curva de geração e demanda e evolução do volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Em25.	172
Figura 71: Curva de volume útil das hidrelétricas ao longo dos períodos do primeiro estágio - caso Em25.	172

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Tamanho do ED implícito para um sistema de grande porte.	81
Tabela 2: Característica dos problemas da RL.	103
Tabela 3: Problemas nas decomposições para um sistema de grande porte.	103
Tabela 4: Distribuição das fontes de geração nos sistemas de teste.	120
Tabela 5: Informação de geradores conectados as barras.	122
Tabela 6: Volume meta e inicial em valores de volume útil.	123
Tabela 7: Valor base da afluência incremental.	125
Tabela 8: Comparação das estratégias na RL - determinístico.	133
Tabela 9: Comparação das estratégias na RL caso estocástico com 4 cenários.	138
Tabela 10: Comparação das estratégias na RL caso estocástico com 9 cenários.	138
Tabela 11: Comparação do desempenho na RL com relação ao tipo de sistema.	139
Tabela 12: Desempenho na RL com relação à condição de volume inicial.	140
Tabela 13: Tabela de parâmetros de ajuste da heurística.	142
Tabela 14: Resultados dos ajustes da heurística para os casos determinísticos.	142
Tabela 15: Melhores ajustes da heurística para os casos determinísticos.	145
Tabela 16: Resultados dos ajustes da heurística para a estratégia SpcDec3 nos casos estocásticos.	146
Tabela 17: Resultados dos ajustes da heurística para a estratégia ScnDec nos casos estocásticos.	147
Tabela 18: Melhores ajustes da heurística para a SpcDec3 - casos estocásticos.	149
Tabela 19: Melhores ajustes da heurística para a ScnDec - casos estocásticos.	149
Tabela 20: Solução do Gurobi para os casos determinísticos.	150
Tabela 21: Solução da SpcDec3 para os casos determinísticos.	151
Tabela 22: Comparação das estratégias com RL e RP casos determinísticos.	155

Tabela 23: Solução do Gurobi para os casos estocásticos.	156
Tabela 24: Solução da SpcDec3 para os casos estocásticos.....	157
Tabela 25: Solução da ScnDec para os casos estocásticos.....	158
Tabela 26: Comparação das estratégias com RL e RP casos estocásticos.	162
Tabela 27: Comparação por tipo de sistema - casos determinísticos. .	164
Tabela 28: Comparação por tipo de sistema - casos estocásticos.	165
Tabela 29: Comparação por condição inicial – casos determinísticos.	165
Tabela 30: Comparação por condição inicial – casos estocásticos.	166
Tabela 31: Custo relativo da SpcDec3.	167
Tabela 32: Custo relativo da ScnDec.	167
Tabela 33: Resultados para um sistema de grande porte - Gurobi.	180
Tabela 34: Resultados para um sistema de grande porte – SpcDec3. .	181
Tabela 35: Dados das usinas hidrelétricas.	189
Tabela 36: Coeficientes da cota de montante das usinas hidrelétricas.	189
Tabela 37: Coeficientes da cota de jusante das usinas hidrelétricas. ..	190
Tabela 38: Dados das unidades hidrelétricas.	191
Tabela 39: Coeficientes do polinômio de rendimento hidráulico das unidades.	192
Tabela 40: Dados de custo das usinas termelétricas.	193
Tabela 41: Dados das usinas termelétricas.....	194
Tabela 42: Dados das linhas de transmissão.	195
Tabela 43: Condições iniciais das hidrelétricas dos sistemas A e B. ..	196
Tabela 44: Condições iniciais das hidrelétricas do sistema C.....	196
Tabela 45: Condições iniciais das hidrelétricas dos sistemas D e E. ..	196
Tabela 46: Condições iniciais das termelétricas dos sistemas A, B e C.	197
Tabela 47: Condições iniciais das termelétricas dos sistemas D e E. .	197

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	21
1.1	OBJETIVOS.....	26
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	27
1.3	CONTRIBUIÇÕES.....	37
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	41
2	OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA	43
2.1	INTRODUÇÃO.....	43
2.2	MODELAGEM DAS INCERTEZAS.....	44
2.3	FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS.....	47
2.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	52
3	MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	53
3.1	INTRODUÇÃO.....	53
3.2	SISTEMA HIDROTÉRMICO	53
3.2.1	Usinas Hidrelétricas	54
3.2.1.1	Reservatórios.....	55
3.2.1.2	Processo de geração de energia.....	58
3.2.2	Usinas Termelétricas.....	66
3.2.3	Demais elementos do sistema.....	71
3.3	PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO ELETROENERGÉTICA	73
4	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO	83
4.1	INTRODUÇÃO.....	83
4.2	MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO.....	83
4.2.1	Decomposição Espacial.....	86
4.2.1.1	Decomposição Espacial 1	88
4.2.1.2	Decomposição Espacial 2	92
4.2.1.3	Decomposição Espacial 3	95
4.2.2	Decomposição por Cenários	98
4.2.3	Algoritmo de solução da RL	101

4.3	RECUPERAÇÃO PRIMAL	107
4.3.1	Heurística	107
4.3.2	Aproximação linear da função de recurso.....	112
4.3.3	Algoritmo de solução da RP.....	114
4.4	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	116
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS.....	119
5.1	DESCRIÇÃO DOS SISTEMAS TESTE	119
5.1.1	Usinas e rede de transmissão	120
5.1.2	Condições iniciais.....	123
5.1.3	Geração dos cenários.....	124
5.2	EXPERIMENTOS COM A RL.....	126
5.2.1	Componente simples.....	127
5.2.2	Casos determinísticos	130
5.2.3	Casos estocásticos	135
5.2.4	Análise da característica do sistema e condições iniciais de armazenamento.....	139
5.3	EXPERIMENTOS COM A RL E RP	141
5.3.1	Ajustes da Heurística.....	141
5.3.1.1	<i>Casos determinísticos</i>	<i>142</i>
5.3.1.2	<i>Casos estocásticos</i>	<i>145</i>
5.3.2	Resultados dos casos determinísticos	149
5.3.3	Resultados dos casos estocásticos	155
5.3.4	Análise da característica do sistema e condições iniciais de armazenamento.....	164
5.3.5	Análise da solução primal	166
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	173
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	173
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	176
6.2.1	Sugestões de estudos da modelagem	176
6.2.2	Sugestões de estudos na RL	178
6.2.3	Sugestões de estudos na RP.....	179

APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS DA RP NA RECURSÃO REGRESSIVA.....	183
APÊNDICE B – DADOS DOS SISTEMAS TESTE	189
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	199

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de energia elétrica é um conjunto de componentes cujo objetivo é a geração e o transporte de energia para os consumidores considerando determinados padrões de qualidade. A produção da energia elétrica é feita por usinas cujas principais fontes primárias são hidráulica, térmica (gás natural, petróleo, carvão, nuclear, biomassa), eólica e solar. Por sua vez, o transporte é realizado por linhas de transmissão e distribuição, sendo diferenciadas pelo nível de tensão de operação. Por fim, o consumo é feito por qualquer dispositivo ou aparelho que utiliza a energia elétrica para operar.

No sistema elétrico brasileiro destacam-se alguns componentes que possuem características únicas em âmbito mundial, como a grande capacidade de armazenamento de água das usinas hidrelétricas¹ e as longas redes de transmissão². Esses atributos são justificados pela abundância de recursos hídricos e longas distâncias entre as principais usinas de geração e os consumidores. Adicionalmente, seu sistema de produção é classificado como hidrotérmico, composto principalmente por usinas termelétricas e hidrelétricas, cuja participação destas últimas em 2015 é predominante com, aproximadamente, 65% da capacidade instalada (ANEEL, 2015).

Para que o processo que vai desde a geração até o consumo de energia ocorra de forma adequada, o funcionamento de seus componentes deve ser monitorado e controlado de acordo com um objetivo definido a priori. Portanto, é imprescindível fazer estudos de planejamento da operação energética, principalmente em sistemas hidrotérmicos, como o brasileiro, em que existem muitas complexidades envolvidas, dentre as quais destacam-se a incorporação de incertezas, o grande porte do problema, o acoplamento das decisões operativas e as não linearidades implícitas. Consequentemente, é inviável a adoção de um modelo

¹ Com base no documento MME (2014), em 2014, a capacidade de armazenamento dos reservatórios era de 288 GW médios, o que representariam aproximadamente 4,4 meses de suprimento de energia, considerando uma demanda média constante e a ausência de chuvas nesse período.

² Em 2014 o Brasil possuía 116.767 km de linhas de transmissão (“Desafios na Operação do SIN – 2015/2018”, 2014).

matemático único para o tratamento do problema de planejamento da operação energética (SILVA, 2012).

No Brasil, o problema de operação energética é subdividido em etapas coordenadas entre si (MACEIRA *et al.*, 2002), sob o comando do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS). Este realiza a operação do Sistema Interligado Nacional (SIN) de forma centralizada, em que o objetivo principal é otimizar os recursos disponíveis de maneira a minimizar o custo esperado³ de operação, observando ainda padrões adequados de confiabilidade no suprimento de energia. Para isso, realizam-se estudos divididos em etapas, coordenadas entre si, que se estendem do médio e curto prazos à programação diária da operação eletroenergética, conforme descrito abaixo.

- (i) Planejamento de médio prazo: (KLIGERMAN, 1992; LARROYD, 2012; MATOS; FINARDI; SILVA, 2008; PEREIRA; PINTO, 1985; SILVA; FINARDI, 2003). Nesta etapa, cujo horizonte é de cinco anos com detalhamento em base mensal, determinam-se as gerações termelétrica e hidrelétrica, os intercâmbios e o custo esperado de operação do sistema durante o horizonte de estudo. A principal ferramenta utilizada é o modelo computacional NEWAVE (CEPEL, 2013a; MACEIRA *et al.*, 2008), que resolve o problema considerando nove reservatórios equivalentes (associados às principais bacias hidrográficas do SIN) e emprega a técnica da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PEREIRA, 1989; PEREIRA; PINTO, 1991). Além disso, tem-se como principal resultado a função de custo futuro (FCF) que é utilizada como dado de entrada para o modelo de curto prazo;
- (ii) Planejamento de curto prazo: (ARARIPE NETO *et al.*, 1985; GONÇALVES *et al.*, 2011; PEREIRA; PINTO, 1983; SANTOS *et al.*, 2009). Neste caso, o horizonte é de dois meses dividido em intervalos semanais no primeiro mês e mensal no segundo. A principal ferramenta utilizada é o modelo computacional DECOMP (CEPEL, 2013b; PINTO *et al.*,

³ Nessa otimização considera-se ainda o mecanismo de aversão a risco CVaR (Valor Condicionado a um Dado Risco), cujo objetivo é incorporar o custo dos cenários mais críticos no cálculo da política de operação, em conjunto com a minimização do valor esperado.

2009), o qual representa individualmente cada usina hidrelétrica do sistema e algumas restrições elétricas e hidrelétricas especiais. Assim, considera-se a incerteza associada às vazões afluentes de cada reservatório em vez das energias afluentes por região geográfica ou subsistema, como no modelo NEWAVE. Os níveis de geração por usina e os intercâmbios entre subsistemas são alguns dos resultados obtidos nesse estudo, bem como os custos marginais de operação para cada submercado e patamar de carga do sistema. Dado que a estratégia de solução é semelhante à utilizada no NEWAVE, tem-se também como resultado uma função de custo futuro;

- (iii) Programação Diária da Operação Eletroenergética (PDE) (ARISTIZÁBAL, 2012; DINIZ, 2007; DINIZ; SANTOS; MACEIRA, 2006; ENCINA *et al.*, 2008; FINARDI; SILVA, 2006; KADOWAKI *et al.*, 2009; PEREIRA; PINTO, 1982, 1987; RODRIGUES; FINARDI; SILVA, 2008; TAKIGAWA *et al.*, 2012). Tem como objetivo estabelecer os programas diários de geração e intercâmbios entre subsistemas para atendimento da demanda para o dia seguinte. O horizonte de estudo é de alguns dias até uma semana, divididos em intervalos horários ou de trinta minutos. Nesta etapa, considera-se a topologia da rede de transmissão; portanto, permite-se representar e avaliar os impactos elétricos e energéticos da operação do sistema de forma mais precisa. Seu principal objetivo é garantir a otimização energética dos recursos de geração e a segurança operacional do sistema.

A etapa (iii) é composta por um problema desafiante que ainda não está consolidado como as demais etapas, ou seja, no caso Brasileiro não se usa um modelo computacional como nos problemas de médio e curto prazos. Nesse sentido, alguns trabalhos têm concentrado esforços para definir este modelo (BELLONI *et al.*, 2003; DINIZ, 2007; FINARDI, 2003; RODRIGUES, 2009; TAKIGAWA, 2010); porém, estes estudos ainda encontram-se em processo de validação técnica-computacional no âmbito do SIN. Portanto, atualmente, no Brasil o ONS não faz uso de um modelo de otimização que forneça a política ótima de geração para todas as unidades do sistema para o dia seguinte.

Além disso, no Brasil, a PDE tem sido tratada como um problema de otimização determinística, pois a consideração de incertezas adicionaria mais complexidades ao modelo, tornando sua resolução ainda mais onerosa computacionalmente. Assim, geralmente, opta-se pela representação mais detalhada dos processos físicos (isto é, modelagem dos componentes do sistema) devido à proximidade com a operação em tempo real, em vez de enfatizar as questões associadas às incertezas.

Porém, devido a incorporação de fontes de energia eólica principalmente, nos últimos anos tem-se visto trabalhos, em âmbito mundial (SARAVANAN *et al.*, 2013; TAHANAN *et al.*, 2015; ZHENG; WANG; LIU, 2015) com foco na representação de incertezas na programação da operação de unidades geradoras (conhecido em inglês como *Stochastic Unit Commitment*). A ideia consiste em incorporar algumas fontes de incertezas em conjunto com um razoável nível de detalhamento matemático para representar os componentes do sistema.

Como principais justificativas da adoção de modelos estocásticos tem-se inicialmente que a demanda de energia elétrica pode desviar dos valores previstos devido à diversos fatores difíceis de serem antecipados, como o clima, falhas em equipamentos, conexão e desconexão de consumidores locais, entre outros. Essa incerteza é acentuada quando cada barra do sistema de transmissão é considerada diretamente na modelagem do problema, pois as diferenças pontuais podem ser muito maiores do que a média observada em estudos de previsão da demanda (valores projetados por região ou subsistema).

Atualmente, as fontes de Geração Distribuída (GD) apresentam um crescimento na participação da matriz energética, devido basicamente aos incentivos fornecidos pelo governo (MME, 2014). As principais fontes de geração que se enquadram como GD são eólicas, solares, pequenas centrais hidrelétricas e termelétricas a biomassa e gás natural. Em geral, como são usinas de pequeno porte, o operador do sistema não tem controle e nem uma programação de quando essas usinas entram ou saem de operação. Assim, as características de produção intermitente, inerentes a algumas dessas tecnologias, fazem com que blocos distribuídos de energia sejam gerados em pequenos intervalos de tempo.

Algumas dessas fontes de geração possuem incertezas em sua produção de energia, como por exemplo as gerações eólica e solar, que possuem um elevado nível de imprevisibilidade em suas fontes primárias, o vento e os níveis de radiação solar, respectivamente. Segundo a

projeção divulgada pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE) espera-se, para 2023, um crescimento de, aproximadamente, 311% na capacidade instalada de fontes de geração eólica e uma potencial inserção da energia solar fotovoltaica na matriz energética brasileira (MME, 2014). De acordo com Moura e Almeida (2010), a produção de energia a partir de geração eólica é estocástica por natureza, dado que sua fonte primária depende de condições meteorológicas aleatórias que são pouco previsíveis para períodos curtos de tempo, como horas e dias. O trabalho de Moura e Almeida (2010) fortalece ainda mais a consideração de incertezas na programação diária. Os autores apresentam o registro da geração de energia eólica de alguns países; em uma hora, a produção das usinas varia de $\pm 10\%$ a $\pm 35\%$ de sua capacidade instalada. Isso pode alterar significativamente a programação das unidades, dado que decrementos ou incrementos na geração eólica exigem que o sistema tenha outros recursos preparados para atender a demanda após essas alterações. Portanto, todos esses fatores supracitados representam um aumento de incertezas na previsibilidade da demanda (considerando aqui a geração das usinas eólicas como um valor a ser decrementado da demanda) de energia do sistema.

Adicionalmente, em virtude da grande capacidade de armazenamento do sistema hidrelétrico, outra importante característica a ser considerada no modelo de otimização é a disponibilidade de água para geração de energia. Essa disponibilidade depende das chuvas e consequentemente da previsão das aflúências. Embora o Brasil possua reservatórios com grande capacidade de armazenamento, aproximadamente 55% das hidrelétricas são usinas consideradas a fio d'água, ou seja, sem capacidade de regularização mensal ou superior. Consequentemente, a operação do sistema também é diretamente afetada pela incerteza das aflúências em horizontes de mais curto prazo.

Assim, os fatores descritos motivam o uso de modelos de otimização estocástica, que levem em consideração explicitamente as incertezas associadas à demanda e à aflúência na programação da operação para o dia seguinte a operação em tempo real. No mínimo, a metodologia desenvolvida nesse trabalho pode ser usada para avaliar a necessidade da representação estocástica das variáveis de aflúência e demanda. Portanto, baseado na linha de trabalhos de outros países e na ideia de que os erros de previsão indicam desvios significativos no

despacho e também no custo de operação, busca-se propor a estratégia de solução e as análises do presente trabalho.

Dado o grande porte do sistema elétrico brasileiro, inicialmente, propõe-se um modelo de otimização linear com variáveis binárias, ou seja, aproximam-se as não linearidades dos componentes do sistema, de modo que seja possível resolvê-lo. Outra estratégia seria considerar o máximo de detalhes possíveis na modelagem e se aprofundar em técnicas de solução para resolvê-lo. Entretanto, nesse trabalho buscou-se a estratégia de resolver primeiro um modelo simplificado e se necessário, e possível, adicionar mais complexidades ao modelo. Além disso, a própria inclusão de variáveis aleatórias ao modelo aumenta sua complexidade e, consequentemente a sua dificuldade de resolução. Portanto, a ideia é primeiramente ter uma estratégia de solução do problema em um tempo considerado adequado, dando oportunidade para que futuramente, outros trabalhos analisem como refinar a representação matemática para diminuir os erros de modelagem.

Nesse sentido, este trabalho está concentrado em estudos da PDE considerada como um modelo de otimização estocástica, cujos objetivos gerais e específicos são descritos abaixo.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste em contribuir com os métodos de solução e modelagem do problema da PDE, propondo-se um modelo matemático e aprimoramentos em seus métodos de resolução. Conforme descrito anteriormente, algumas informações usadas para representar matematicamente o problema são difíceis de serem antecipadas, assim consideram-se como principais fontes de incerteza a demanda (fortemente dependente da geração eólica) e a afluência incremental. Por sua vez, os objetivos específicos a serem cumpridos são:

1. Estudar e analisar diferentes representações matemáticas dos componentes do sistema hidrotérmico. Nesta etapa, busca-se na literatura diferentes formas de modelar a geração de energia e a rede de transmissão, pois dependendo da modelagem adotada pode-se facilitar ou dificultar a resolução do problema. Assim, antes de definir o modelo da PDE busca-se uma representação que, em conjunto com as demais restrições, reduza o conjunto de soluções viáveis, que em geral facilita a resolução do problema;

2. Propor um modelo para a PDE, com um detalhamento matemático que permita incluir incertezas no modelo sem tornar sua resolução demasiadamente onerosa do ponto de vista computacional;
3. Implementar e analisar estratégias de solução eficientes para resolver o problema. Dado que o problema a ser resolvido é de programação estocástica inteira mista e de grande porte, necessitam-se de métodos que tornem viável a resolução do problema, tais como técnicas de decomposição. Neste caso, a resolução é dividida em duas etapas, a Relaxação Lagrangiana (RL) e a Recuperação Primal (RP);
4. Na etapa da RL busca-se comparar diferentes tipos de decomposição dual e aplicar algumas técnicas para tornar o desempenho do algoritmo mais eficiente;
5. Estudar e desenvolver alguma estratégia de recuperação primal. Neste caso, a ideia é utilizar diferentes metodologias para desenvolver uma heurística que encontre uma solução primal viável a partir das soluções encontradas na RL;
6. Por fim, definir sistemas e dados de entrada para serem utilizados como casos para testes, dado que somente informações parciais do sistema brasileiro são de domínio público. Assim, tem-se também como tarefa reunir e organizar os dados utilizados na PDE. Adicionalmente, analisar os resultados e propor ideias para trabalhos futuros.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como mencionado anteriormente, a PDE é a etapa de planejamento mais próxima da operação em tempo real; consequentemente, o horizonte de estudo é curto e em geral consideram-se mais detalhes na modelagem do problema, comparando-se com o planejamento de curto e médio prazos.

Como demonstrado nos últimos trabalhos desenvolvidos no Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (LabPlan) nesta área (ARISTIZÁBAL, 2012; FINARDI, 2003; RODRIGUES, 2009; TAKIGAWA, 2010), o modelo da PDE resulta em um problema de otimização não-linear, inteiro-misto, determinístico e de grande porte. Nestes trabalhos, aborda-se a alocação ótima das unidades em sistemas hidrotérmicos interligados, cujo objetivo principal é encontrar uma representação adequada para o problema da PDE. Esse tema já vem sendo

estudado há alguns anos em diversos países e tem foco na resolução e modelagem do problema de programação de unidades sem considerar incertezas (BELLONI *et al.*, 2003; BORGHETTI *et al.*, 2003; CHAO-AN *et al.*, 1997; FELTENMARK; KIWIEL, 1998; FERREIRA *et al.*, 1989; FRANGIONI; GENTILE; LACALANDRA, 2011; HEREDIA; NABONA, 1995; HINOJOSA; LEYTON, 2012; HOUZHONG; LUH; LAN, 1994; LEMARÉCHAL *et al.*, 1996; NAYAK; RAJAN, 2010; RUZIC; RAJAKOVIC; VUCKOVIC, 1996; RUZIC; VUCKOVIC; RAJAKOVIC, 1996; SALAM; NOR; HAMDAM, 1998; SHAW; GENDRON; BERTSEKAS, 1985; SIFUENTES; VARGAS, 2007; SOKKAPPA, 1963; TONG; SHAHIDEHPOUR, 1990; XIAOHONG *et al.*, 1997; YAN; LUH; ZHANG, 1994). De forma geral, ao longo dos anos foram se incluindo mais detalhes na modelagem, como por exemplo, a consideração de funções quadráticas no custo de operação das termelétricas, funções de produção de hidrelétricas não lineares, consideração de variáveis inteiras e assim por diante. Trabalhos mais recentes incluem ainda restrições da dinâmica do sistema, como é o caso do trabalho de Jiang *et al.* (2013), em que busca-se resolver um problema de programação de unidades com o objetivo de manter a estabilidade transitória e a operação econômica. Uma revisão bibliográfica detalhada dos principais trabalhos na área determinística pode ser encontrada em Finardi (2003), Diniz (2007) e Farhat, El-Hawary (2009) e Taktak e D'Ambrosio (2015).

Os trabalhos supracitados abordam as características gerais do problema de programação da operação, assim como vários métodos de solução para resolvê-lo. Porém, devido ao grande porte do sistema brasileiro e à presença de restrições com acoplamentos (espacial e temporal), as técnicas de decomposição aparecem como métodos naturais para resolver o problema. Essa estratégia já tem sido aplicada nos casos determinísticos há alguns anos (AL-AGTASH; RENJENG, 1998; BELLONI *et al.*, 2003; BORGHETTI *et al.*, 2003; DINIZ; SAGASTIZABAL; MACEIRA, 2007; FINARDI; SILVA; SAGASTIZÁBAL, 2005; HABIBOLLAHZADEH; BUBENKO, 1986; REDONDO; CONEJO, 1999; VIRMANI *et al.*, 1989).

Por outro lado, a inclusão de variáveis aleatórias em problemas inteiro-mistos vem sendo cada vez mais pesquisada, tanto na área energética quanto em problemas de outras naturezas. As pesquisas em problemas de otimização estocástica com variáveis inteiras se iniciaram

por volta dos anos 70, e somente mais tarde, nos anos 80, foram publicados trabalhos que considerassem variáveis inteiras e também contínuas em problemas estocásticos. Grande parte desses trabalhos pode ser visto nas revisões feitas em Schultz (2003) e Sen (2005) e também no resumo feito por van der Vlerk (1996). Nessa área, destacam-se alguns tutoriais de Schultz *et al.* (1996), Ahmed *et al.* (2010) e Özaltın *et al.* (2012), em que são feitas revisões e discutidos os progressos da pesquisa aplicada em problemas de otimização estocástica de dois estágios com variáveis contínuas e inteiras. Uma revisão dos recentes progressos e aplicações pode ser vista em Römisch e Vigerske (2010), em que são revistas algumas características da modelagem e métodos de decomposição, assim como é descrita uma aplicação para o problema da programação diária de unidades termelétricas.

No trabalho de Takriti *et al.* (1996) apresenta-se um modelo multiestágio e desenvolve-se uma metodologia para resolver o problema de programação da geração de unidades termelétricas. São consideradas incertezas na demanda de energia e na taxa de falha de geradores. A metodologia proposta consiste em decompor o problema por cenários, ou seja, o problema estocástico é dividido em um conjunto de subproblemas determinísticos, método conhecido como *Progressive Hedging* (PH) (ROCKAFELLAR; WETS, 1991). Além disso, utiliza-se a Relaxação Lagrangiana (BAZARAA; SHETTY, 1979) para decompor cada um dos problemas determinísticos em vários subproblemas, um para cada termelétrica, cuja resolução é feita por Programação Dinâmica (BELLMAN, 1957).

Em Carpentier *et al.* (1996) considera-se uma modelagem multiestágio para o problema de programação diária de unidades termelétricas, com incerteza na demanda de energia. Para decompor o problema é utilizado um algoritmo inexato do Lagrangeano Aumentado (BERTSEKAS, 1999). Porém, diferentemente do trabalho de Takriti *et al.* (1996), citado anteriormente, os autores decompõem o problema espacialmente, ou seja, tem-se um subproblema de otimização estocástica para cada usina, resolvido por Programação Dinâmica Estocástica (BELLMAN, 1957).

Por sua vez, em Carøe e Schultz (1997) considera-se a programação para um sistema hidrotérmico e utiliza-se uma metodologia de decomposição por cenários. A estratégia de solução utiliza uma combinação de Relaxação Lagrangiana (RL) com *Branch and Bound*

(LAND; DOIG, 1960). A metodologia é testada em um caso com dados do sistema elétrico alemão.

Philpott *et al.* (2000) consideram uma representação individualizada das unidades geradoras de cada usina hidrelétrica; porém, neste trabalho, não consideram usinas termelétricas. A metodologia de solução é baseada em uma heurística que divide o problema por usinas e resolve os subproblemas de otimização estocástica de maneira recursiva.

No trabalho de Nowak e Römisich (2000) resolve-se o problema da programação diária em um sistema hidrotérmico considerando a demanda incerta. Utiliza-se um método denominado pelos autores como Relaxação Lagrangiana Estocástica. O problema original é decomposto em uma série de subproblemas de otimização estocástica, um para cada usina. Os subproblemas referentes as usinas termelétricas são resolvidos por uma técnica de Programação Dinâmica Estocástica e os subproblemas hidrelétricos são resolvidos por um algoritmo de descida específico. Este último explora a estrutura especial das restrições para encontrar subconjuntos da árvore de cenários que garantem a direção de descida; mais detalhes deste procedimento podem ser visto em Nowak (1996). A metodologia é aplicada em um sistema elétrico da Alemanha, com número de cenários variando de 5 até 100 e um horizonte de 168 horas. Em Nürnberg e Römisich (2002) inclui-se também a incerteza com relação aos preços de combustíveis e de contratos de entrega. O problema resultante é resolvido empregando-se a mesma metodologia de solução do trabalho anterior.

Da mesma maneira que os estudos anteriores, em Gröwe-Kuska *et al.* (2002), o problema de otimização estocástica é decomposto em subproblemas por usinas. Neste caso, consideram-se ainda incertezas na vazão afluente aos reservatórios. A estratégia de solução é composta por duas etapas de resolução. Na primeira, utiliza-se um método proximal de feixes (KIWIEL, 1990), em que cada subproblema de otimização estocástica é resolvido por Programação Dinâmica ou pelo mesmo algoritmo de descida citado anteriormente de Nowak (1996). Por sua vez, na segunda etapa utilizam-se algumas heurísticas para determinar uma solução viável. Gröwe-Kuska e Römisich (2005) utilizam o mesmo modelo e estratégia de solução; porém, neste trabalho o foco é a geração dos cenários para o problema.

Shiina e Birge (2004) apresentam um algoritmo de geração de colunas para decompor o problema de programação estocástica

multiestágio em um subproblema para cada gerador. Por sua vez, os subproblemas resultantes são resolvidos por um algoritmo de Programação Dinâmica.

Em Nowak *et al.* (2005) otimiza-se a geração e a comercialização de energia para o dia seguinte em um sistema hidrotérmico. Os preços são as variáveis aleatórias e para resolver o problema utiliza-se um método de decomposição por cenários, combinando RL com *Branch and Bound*.

Fleten e Kristoffersen (2008) apresentam um modelo para a programação da operação de sistemas hidrelétricos, em que os preços da energia para o dia seguinte e a afluência dos reservatórios são considerados incertos. A geração das hidrelétricas depende apenas da vazão turbinada nas unidades e é representada por uma função linear por partes. Os resultados apresentados são obtidos de dados do sistema da Noruega e o Equivalente Determinístico⁴ (ED) resultante é de natureza linear inteira-mista, sendo resolvido pelo pacote de otimização CPLEX (“IBM ILOG CPLEX”, 2015).

Ping e Lixin (2010) investigam o problema da programação de unidades termelétricas considerando incertezas no comércio de emissões de CO₂ e nos preços de energia em um ambiente de mercado. O problema de otimização estocástica é formulado como um problema linear inteiro-misto de grande porte, sendo resolvido por uma abordagem baseada em decomposição por cenários. A RL é utilizada para relaxar as restrições de não antecipatividade e de limites de emissão de CO₂, separando o problema original em dois conjuntos de subproblemas. Por fim, utilizam-se algumas heurísticas para ajustar os valores das variáveis primais e tornar a solução viável.

Em Xiong e Jirutitijaroen (2010) propõe-se um problema de programação estocástica de dois estágios com variáveis inteiras e contínuas. O objetivo é minimizar o custo esperado de operação considerando incertezas na demanda. O problema é resolvido usando uma metodologia chamada de *L-shaped* (VAN SLYKE; WETS, 1969) com algumas modificações para acelerar e melhorar a convergência do algoritmo. Assim como em Peng e Jirutitijaroen (2011), o modelo utilizado contém restrições de atendimento à demanda, reserva girante, rampas e limites operativos dos geradores. Neste último trabalho utiliza-

⁴ Problema de grande porte determinístico que corresponde à um problema de otimização estocástica com um número finito de cenários.

se uma versão modificada do algoritmo de multicortes, em que se combinam as vantagens do algoritmo de *L-shaped* e de multicortes tradicional, além de considerar incertezas também na disponibilidade das unidades geradoras.

Zhao e Guan (2013) utilizam uma combinação de otimização estocástica e robusta para resolver o problema. Um parâmetro é definido na função objetivo que pondera a solução entre o custo esperado e o custo do pior cenário considerando restrições baseadas na otimização robusta. O problema é aplicado na programação de unidades termelétricas considerando incertezas na demanda, cuja resolução é dada por um algoritmo de decomposição de Benders (BENDERS, 1962).

Além disso, devido à grande preocupação com o meio ambiente, tem-se uma tendência de aumento das fontes de energia renováveis no problema da programação da operação de unidades geradoras. Assim, a inclusão de geração eólica, que utiliza a velocidade do vento para a produção de energia elétrica, vem sendo considerada em diversos trabalhos (CHUN-LUNG, 2008; CONSTANTINESCU *et al.*, 2011; ESMAEELI; KAZEMI, 2012; PAPPALA *et al.*, 2009; SIAHKALI; VAKILIAN, 2010; VENKATESH *et al.*, 2008; WANG *et al.*, 2013). De forma geral, esses trabalhos apresentam modelos para programação de usinas termelétricas e eólicas, considerando incertezas na demanda e/ou na geração eólica.

Chun-Lung (2008) desenvolve um algoritmo que combina os métodos *Branch and Bound* e Programação Dinâmica para resolver o problema. Por outro lado, Venkatesh *et al.* (2008) e Pappala *et al.* (2009) utilizam técnicas de algoritmos evolutivos em sua estratégia de solução.

Nos trabalhos apresentados por Siahkali e Vakilian (2010) e Esmaeeli e Kazemi (2012) o comportamento estocástico do vento é representado por um conjunto de cenários e então cada cenário é resolvido por métodos determinísticos. Assim, a solução do problema é determinada por uma combinação dos resultados determinísticos selecionados.

Por sua vez, Wang *et al.* (2013) propõem um modelo de programação diária considerando discretização sub horária com o objetivo de refinar os resultados da otimização. O problema resultante é de natureza linear inteira-mista, e para resolvê-lo aplica-se uma decomposição de Benders modificada.

Papavasiliou e Oren (2013) apresentam estudos sobre o impacto da inserção em larga escala de geradores eólicos em sistemas elétricos, considerando restrições de transmissão e falha de componentes. Neste artigo, os autores modelam um sistema com as usinas divididas em dois conjuntos: geradores lentos e geradores rápidos, cuja representação matemática é composta por restrições de limites de geração, rampas de incremento/decremento e tempo de permanência em operação e fora de operação; por outro lado, a função de produção dos geradores não é considerada. O problema de otimização estocástica é formulado como um modelo linear de dois estágios, sendo que no primeiro (antes do evento aleatório acontecer) decide-se a programação dos geradores lentos, que não pode ser alterada no segundo estágio. A programação dos geradores rápidos e os níveis de produção de todos os geradores podem ser ajustados somente após a realização da variável aleatória, ou seja, no segundo estágio, como um recurso. A estratégia de solução consiste em um método de decomposição dual baseado na RL, com algumas modificações do algoritmo apresentado em Papavasiliou *et al.* (2011). Neste método, o problema de otimização estocástica é dividido em um conjunto de subproblemas determinísticos, um para cada cenário. Por fim, para se resolver o problema é feita uma seleção de cenários e implementado um algoritmo paralelo.

Em Corchero *et al.* (2011) apresenta-se um modelo de dois estágios para decidir o comissionamento de unidades e a oferta de preços para o dia seguinte. A incerteza está relacionada ao valor do preço de curto prazo da energia. O problema de primeiro estágio é quadrático inteiro-misto, linearizado por meio da técnica *perspective cuts* (FRANGIONI; GENTILE, 2005), enquanto que o problema de segundo estágio é contínuo. O modelo é aplicado em um sistema com 10 cenários e 9 unidades termelétricas e resolvido por pacotes comerciais de otimização inteira-mista.

Zheng, Qipeng *et al.* (2013) resolvem o problema de programação de unidades termelétricas considerando incertezas na demanda. As usinas são divididas em dois grupos, geradores de partida rápida e demais geradores, com restrições de rampa de incremento/decremento e de mínimo tempo de permanência em/fora de operação. O problema estocástico de dois estágios (com recurso completo) é de programação inteira mista com decisões inteiras no primeiro e segundo estágios. Para resolvê-lo é usado um método baseado na decomposição de Benders e na

técnica apresentada por Sherali e Fraticelli (2002), em que utilizam-se dois conjuntos de cortes: um nos subproblemas de segundo estágio e outro no problema mestre, de primeiro estágio. O primeiro conjunto de cortes é utilizado para aproximar cada um dos subproblemas inteiros em subproblemas convexos; por sua vez, o segundo é utilizado como função de custo futuro do primeiro estágio. Uma desvantagem é que os subproblemas de segundo estágio devem ser resolvidos três vezes a cada iteração: primeiramente como problemas inteiro-mistos, para obter as soluções das variáveis inteiras; posteriormente como problemas contínuos (com as decisões inteiras fixas), para a determinação dos cortes de segundo estágio; e por fim como problemas contínuos (com os cortes já adicionados e com as restrições de integralidade relaxadas), para a definição dos cortes que representam o custo futuro do primeiro estágio. No entanto, resolvendo-se somente determinados cenários por amostragem pode-se diminuir o número de subproblemas de segundo estágio resolvidos a cada iteração. Assim, nos casos apresentados pelos autores, mostra-se que a medida que o problema cresce, em número de cenários e em número de unidades, a metodologia torna-se competitiva com os pacotes de otimização comerciais.

No trabalho de Ackooij (2014) resolve-se a programação de unidades de um sistema hidrotérmico considerando incertezas na demanda e na vazão incremental. A incerteza é modelada em forma de restrições probabilísticas agregadas. A estratégia de solução é baseada na decomposição do problema, através da duplicação de variáveis, conhecida como Decomposição Lagrangiana por Guignard (2003). O objetivo é investigar os efeitos do uso de restrições probabilísticas para aumentar a robustez nas decisões de produção de energia, assim a estratégia é testada em um problema de programação de unidades simplificado (convexo). Além disso, são apresentados alguns resultados utilizando-se o Lagrangeano Aumentado, combinando a técnica de duplicação de variáveis com o Princípio do Problema Auxiliar (COHEN, 1980). O autor mostra que a estratégia depende muito de parâmetros de ajustes do método, porém tem grande potencial na resolução do problema.

Ackooij (2015) apresenta ainda outro trabalho aplicado à programação de unidades considerando incerteza nos valores de demanda. Neste caso o objetivo é comparar quatro diferentes modelagens aplicadas à programação estocástica: programação com restrições probabilísticas, otimização robusta, programação estocástica de dois

estágios e programação robusta de dois estágios. A diferença entre as quatro modelagens é basicamente como essa restrição de atendimento à demanda (com informação incerta) é representada. No primeiro modelo, utiliza-se uma restrição probabilística que engloba todos os períodos de tempo simultaneamente, em que a geração total deve estar entre limites (inferiores e superiores) de demanda, com probabilidade suficientemente elevada. Na segunda, utilizam-se as mesmas restrições probabilísticas, porém é considerado um conjunto definido de valores de demanda. Os demais modelos consideram explicitamente as decisões recursivas, como um modelo de dois estágios, em que algumas decisões podem ser ajustadas após a realização da variável aleatória, ou seja, no segundo estágio. A diferença entre o terceiro e o quarto modelo é que no último considera-se na função objetivo o maior custo de segundo estágio, ou seja, o pior cenário. Como estratégias de solução são usadas técnicas como dualização Lagrangiana, recuperação primal com heurísticas baseadas na relaxação Lagrangiana e métodos dos Feixes, que podem ser vistas com mais detalhes em Tahanan *et al.* (2015) e Sagastizábal (2012). As técnicas são testadas em vários casos de grande porte, em um sistema simplificado (modelo convexo para hidrelétricas e modelo não convexo tradicional para as termelétricas).

O modelo de dois estágios estocástico utilizado no trabalho citado anteriormente (ACKOOIJ, 2015) é descrito em mais detalhes por Ackooij e Malick (2015). Os autores descrevem que o problema de primeiro estágio representa a programação das unidades enviada ao operador do sistema, antes de ser aplicada e da incerteza ser observada. Contudo, essa programação pode ser alterada em tempo real, dando origem ao problema de segundo estágio. Portanto o problema de ambos estágios possuem a mesma estrutura (com variáveis contínuas e inteiras), porém possuem horizontes diferentes. Nesse sentido, são aplicadas técnicas de decomposição primal-dual (misturando decomposição por cenários e Benders) para resolução do problema. Os problemas de ambos os estágios são relaxados, e utiliza-se o método de Feixes com uso extensivo de partida quente para resolvê-los. Em suma, os problemas de segundo estágio são dualizados e resolvidos por Feixes, cujas soluções são utilizadas para construir aproximações lineares de custo futuro para o primeiro estágio. Por sua vez, o problema de primeiro estágio é também dualizado e resolvido por Feixes, e para recuperar a viabilidade da solução são utilizadas algumas heurísticas baseadas nas soluções da RL

(DUBOST; GONZALEZ; LEMARÉCHAL, 2005). Um sistema com dados reais de 136 termelétricas e 22 bacias hidráulicas, com 96 períodos de tempo e 50 cenários é resolvido.

Dada a crescente preocupação com a inclusão de incertezas no problema da programação diária de unidades, ultimamente tem-se visto artigos focados na revisão dos modelos e das estratégias de solução utilizados, mostrando a crescente importância no tema. No trabalho de Tahanan *et al.* (2015) é feita uma revisão bastante abrangente dos diferentes métodos de solução, apresentando desde os trabalhos que resolvem o problema diretamente por pacotes de otimização até métodos de decomposição e métodos não exatos. Os autores justificam que o crescimento cada vez maior da capacidade de geração de fontes renováveis tem aumentando fortemente o nível de incerteza nos sistemas, tornando o modelo (ideal) de *Unit Commitment* como um problema não convexo, de larga escala e incerto (programação estocástica, robusta ou com restrições probabilísticas). Os autores Zheng, Wang e Liu (2015) também apresentam uma revisão dos principais trabalhos que contribuíram na modelagem e em aspectos computacionais da otimização estocástica aplicados na programação de unidades. Uma revisão com foco na área de métodos inexatos é apresentada no trabalho de Saravanan *et al.* (2013), onde os autores descrevem os principais algoritmos genéticos, sistemas inteligentes e metodologias híbridas (combinação de métodos exatos e inexatos) para a solução do problema.

No Brasil os modelos de otimização estocástica tem sido aplicados nas etapas de curto e médio prazo da cadeia de planejamento da operação energética e, conforme já foi destacado, não se tem conhecimento de trabalhos que incluam incertezas aplicados na etapa da PDE. Vale destacar o trabalho feito por Baptistella e Geromel (1980), que foi um dos primeiros trabalhos a incluir incertezas na programação da operação de unidades. Os autores apresentam um método para determinar a operação ótima de um sistema hidrotérmico considerando a demanda incerta. O problema é resolvido pelo método de decomposição de Benders generalizada (GEOFFRION, 1972), sendo testado apenas em um sistema de pequeno porte.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho de doutorado é, de certa forma, uma continuidade dos estudos aplicados à programação diária de unidades iniciados no LabPlan (ARISTIZÁBAL, 2012; FINARDI, 2003; RODRIGUES, 2009; TAKIGAWA, 2010). Conforme descrito anteriormente, a PDE é a última etapa da cadeia de planejamento da operação energética; portanto, sua solução é utilizada como apoio às decisões para a operação do dia seguinte. Nesse contexto, considerar não linearidades e incertezas em sua modelagem é fundamental para se ter uma representação fidedigna à operação em tempo real. No entanto, essa consideração simultânea adiciona complexidades matemáticas que dificultam a resolução do problema. Neste trabalho os desenvolvimentos metodológicos seguiram a estratégia de primeiro conseguir resolver o problema para o sistema de interesse, mesmo que usando uma representação matemática simplificada. Assim, qualquer aprimoramento na modelagem ou na estratégia de solução é feito à medida do necessário, para tornar a resolução factível, ou seja, em um tempo de processamento aceitável.

Dado um problema de programação de unidades simplificado (com variáveis binárias e contínuas, linear e determinístico), pode-se seguir caminhos diferentes para adicionar as complexidades: incluir não linearidades ou incorporar incertezas ao modelo. O segundo possui menos contribuições na literatura que o primeiro e, conforme visto na revisão bibliográfica, é uma tendência nessa área. Nesse sentido, optou-se por seguir a estratégia de primeiramente considerar incertezas no modelo, como um problema de programação estocástica de dois estágios. A ideia é otimizar a utilização de recursos na geração de energia (minimizar o custo esperado de operação), considerando restrições elétricas e operacionais, com incerteza na demanda de energia e na afluência incremental dos reservatórios. As principais não linearidades de problemas aplicados em sistemas hidrotérmicos estão associadas à rede de transmissão, à função de produção das unidades hidrelétricas e à função do custo de produção das termelétricas. O modelo de rede não linear composto por funções senoidais e termos quadráticos e as funções relacionadas à produção de energia, em geral, polinômios de ordem elevada, são aproximadas neste trabalho por funções lineares. Adicionalmente, as unidades geradoras de uma usina hidrelétrica não são

representadas individualmente, e sim agrupadas em conjuntos que possuem as mesmas características operativas.

Deste modo, a PDE é formulada como um problema linear binário-misto de otimização estocástica. Ainda assim, para sistemas elétricos de grande porte, como é o caso do sistema brasileiro, necessitam-se computadores com uma grande quantidade de memória RAM disponível, visto que o grande porte do sistema exige com que grande quantidade de informações sejam armazenadas. Além disso, é infatível resolver o problema resultante por meio de pacotes de otimização comercial, devido ao elevado tempo de processamento necessário. Por isso são utilizadas técnicas de decomposição, pois elas apresentam desempenho satisfatório (e as vezes são a única opção) em problemas de grande porte e com múltiplos acoplamentos (espacial e temporal). A RL é uma das principais metodologias para resolver o problema de programação de unidades de forma eficiente (FRANGIONI; GENTILE; LACALANDRA, 2011), pois é possível explorar a estrutura especial do problema, ou seja, removendo-se algumas restrições de acoplamento separa-se o problema em vários subproblemas menores.

A RL tem sido vastamente aplicada em problemas clássicos de programação de unidades, sendo que seus conceitos básicos podem ser vistos em Bazaraa e Shetty (1979) e Bertsekas (1999). O problema de otimização é dividido em dois níveis. O segundo nível é constituído pela solução dos subproblemas primais. Por sua vez, o primeiro nível consiste na resolução do problema mestre (côncavo e não diferenciável), responsável pela coordenação dos subproblemas, em que atualizam-se os multiplicadores de Lagrange. A Figura 1 ilustra a decomposição de um problema em N subproblemas menores.

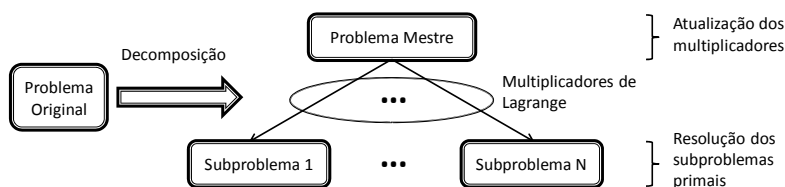


Figura 1: Representação da decomposição dual via RL.

O estado da arte para resolução do problema mestre é o método de Feixes (FELTENMARK; KIWIEL, 1998; LEMARÉCHAL *et al.*, 1995). Por sua vez, a resolução dos subproblemas depende de suas características, sendo que os métodos mais comuns são a Programação

Dinâmica, Heurísticas, *Branch and Bound*, Simplex, Pontos Interiores, entre outros métodos.

Resumidamente, o método da RL consiste em solucionar o problema mestre por meio de um processo iterativo em que os subproblemas são resolvidos diversas vezes; portanto, é crucial ter técnicas eficientes, para que se consiga uma solução coerente em um tempo de processamento viável.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos utilizando a metodologia descrita anteriormente em problemas estocásticos, porém com modelagens e métodos de solução diferentes do proposto neste trabalho, conforme detalhado a seguir. Em suma, os principais estudos citados na revisão bibliográfica em que aplica-se a decomposição dual no problema de programação em sistemas hidrotérmicos podem ser divididos em dois grupos: decomposição por cenários e decomposição espacial. Esses dois grupos diferenciam-se principalmente pela forma de separar o problema original. A seguir descrevem-se as principais diferenças do trabalho de doutorado proposto com relação à esses estudos.

No primeiro grupo, denominado de decomposição por cenários, destacam-se os trabalhos dos autores Takriti *et al.* (1996) e Carøe e Schultz (1997), em que o problema estocástico é dividido em um conjunto de subproblemas determinísticos. A diferença é que muitos dos trabalhos utilizam o *Progressive Hedging* como estratégia de solução, enquanto que neste trabalho propõe-se a resolução em duas etapas: a resolução do problema dual, via RL e a RP. Dado que é usada a RL, tem-se um limite inferior para a solução do problema, bem como pontos de partida para a RP.

Por sua vez, no segundo grupo tem-se, principalmente, os estudos de Nowak e Römisch (2000) e Nürnberg e Römisch (2002), que dividem o problema por tipo de usina (hidrelétrica e termelétrica). A principal diferença para o trabalho proposto é que a estratégia de decomposição utilizada é diferente. Nos trabalhos supracitados, os autores relaxam as restrições de atendimento à demanda e de reserva girante, sendo que os subproblemas resultantes e os multiplicadores de Lagrange são estocásticos. Por outro lado, neste trabalho aplica-se a estratégia de duplicação de variáveis (de Jörnsten *et al.* (1985) citado por Visweswaran (2009), também chamado de Decomposição Lagrangiana por Guignard e Kim (1987b)) ao Equivalente Determinístico do problema estocástico; portanto, os subproblemas são separados de maneira diferente. Além

disso, consideram-se mais detalhes na modelagem do sistema hidrelétrico e na rede de transmissão, assim como aplicam-se outras metodologias na resolução dos subproblemas e na Recuperação Primal.

Adicionalmente, um dos objetivos do trabalho é comparar diferentes estratégias de decomposição dual. Devido à flexibilidade da RL existem várias maneiras de separar o problema original, dependendo de quais restrições são relaxadas, a estrutura dos subproblemas, e por sua vez o próprio problema dual, podem ser bem distintos. Assim, contribui-se com estudos de como construir o problema dual, analisando-se algumas variações da decomposição espacial e da decomposição por cenários. Em ambas, utiliza-se a técnica de duplicação de variáveis ou Decomposição Lagrangiana. Na primeira são analisadas três variações, que se diferenciam por quais tipos de variáveis são duplicadas. Por sua vez, na segunda, em que as restrições de não-antecipatividade são replicadas, os diferentes esquemas são definidos por quais tipos de variáveis de primeiro estágio são replicadas. Contribuindo assim tanto para o aperfeiçoamento das técnicas de decomposição quanto para a resolução de problemas inteiro-mistos de grande porte.

Ainda, para problemas não convexos a aplicação da RL tipicamente não garante uma solução primal viável, necessitando de alguma outra metodologia para recuperar a viabilidade da solução. Portanto outra contribuição do trabalho é o desenvolvimento de uma heurística a ser aplicada concomitantemente com a RL. Essa heurística utiliza como informações as soluções primais dos subproblemas obtidas em cada iteração do algoritmo de Feixes. Além disso, também há uma realimentação da solução obtida na Heurística, utilizada como limite inferior no método de Feixes.

Por fim, a principal contribuição deste trabalho é a comparação de métodos de decomposição dual aplicados a sistemas elétricos com características distintas e a implementação de uma Heurística para a RP. Diferentemente dos trabalhos anteriores, comparam-se diferentes alternativas de decomposição do problema a fim de determinar a estratégia que apresenta o melhor desempenho, usando os mesmos dados de entrada e algoritmos de solução. Além disso, como principal contribuição tem-se também a inclusão de incertezas no modelo matemático da PDE, contemplando detalhes da operação de usinas hidrelétricas e termelétricas e representando a rede de transmissão como um modelo linear.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

No próximo capítulo são abordados os conceitos de otimização estocástica relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre esses conceitos, destacam-se a formulação do problema de dois estágios e do problema do ED.

Em seguida, no Capítulo 3, são apresentados os modelos matemáticos que descrevem o comportamento dos componentes do sistema hidrotérmico em estudo, bem como as considerações utilizadas na modelagem. Além disso, apresenta-se a formulação do problema de otimização resultante, assim como as complexidades envolvidas em sua resolução.

No Capítulo 4 são discutidas as estratégias de solução. Inicialmente descrevem-se os métodos de decomposição primal e dual e propõem-se as diferentes estratégias de decomposição ao problema da PDE. Uma seção é dedicada aos detalhes de implementação e aplicação da RP por meio de heurísticas. Por fim, apresentam-se os algoritmos de solução a serem utilizados.

Por sua vez, no Capítulo 5 são apresentados os experimentos computacionais. O capítulo é iniciado pela apresentação e detalhamento dos sistemas elétricos usados nos testes. Em seguida, são apresentados os resultados da RL comparando as diferentes estratégias de decomposição. Por fim, são apresentados os resultados e o desempenho do uso da heurística como RP.

Por fim, no Capítulo 6 descrevem-se as considerações finais e discutem-se propostas de desenvolvimentos futuro.

2 OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA

2.1 INTRODUÇÃO

O conhecimento das informações que serão utilizadas como dados de entrada para os modelos de otimização são de grande importância para a resolução de um problema. Entretanto, as vezes, esses dados podem ser difíceis de serem obtidos ou previstos precisamente. Assim, os dados utilizados podem ser considerados conhecidos (modelos determinísticos), ou então incertos, no qual somente suas possibilidades de ocorrência são conhecidas. Consequentemente, nos modelos de otimização, existe uma classificação dos problemas com relação à natureza dos dados utilizados na modelagem: otimização determinística ou otimização estocástica. Na primeira categoria, considera-se que toda a informação de entrada é conhecida no momento que uma decisão é tomada, enquanto que na segunda, é necessário otimizar considerando-se as informações de entrada incertas.

Além disso, nos modelos de otimização estocástica, área em que se enquadra este trabalho, a inclusão de incertezas na modelagem pode ser feita por diferentes meios. Neste estudo em específico, se consideram os modelos de recurso em dois estágios (BIRGE e LOUVEAUX, 2011). De maneira geral, nesses modelos toma-se uma decisão inicial (dita de primeiro estágio), antes de se conhecer o valor das variáveis aleatórias. Após a realização dos eventos aleatórios, é necessário tomar novas decisões, ditas de segundo estágio. A definição de estágio está relacionada com decisões antes e depois do evento aleatório e não, necessariamente, ao instante de tempo em que ocorrem, assim um estágio pode conter uma sequência de decisões e eventos.

Nesse sentido, neste capítulo abordam-se alguns conceitos básicos de modelos de otimização estocástica e definem-se algumas convenções utilizadas neste trabalho. Inicialmente, apresenta-se a maneira na qual as variáveis aleatórias são consideradas no problema e em seguida discutem-se as diferentes formas de formular problemas de otimização estocástica, destacando-se os modelos de dois estágios.

2.2 MODELAGEM DAS INCERTEZAS

A maioria dos problemas reais possuem incertezas que afetam suas soluções; portanto, devem ser representados matematicamente como modelos de otimização estocástica. Alguns exemplos são problemas nas áreas de economia, energia, logística, meteorologia, entre outros. Os modelos de otimização estocástica são utilizados para representar problemas em que alguns dados de entrada são desconhecidos no momento da tomada de decisão. A incerteza pode estar presente, por exemplo, devido à falta de confiabilidade nos dados, erros de medição, eventos futuros difíceis de serem previstos e assim por diante.

A incorporação de incertezas em modelos de otimização pode ser feita por diferentes meios, como por exemplo a inclusão de restrições probabilísticas ou pela consideração de variáveis aleatórias. Neste trabalho, a incerteza é modelada por meio de variáveis aleatórias com uma Função de Probabilidade (FP) conhecida. Uma FP pode ser contínua ou discreta, sendo que no último caso o valor esperado é dado pelo somatório da probabilidade multiplicada pela realização da variável aleatória. Em Shapiro e Philpott (2007) descreve-se com detalhes a diferença em se considerar FPs contínuas e discretas em modelos de otimização estocástica.

Além disso, as incertezas associadas ao problema, considerando uma FP discreta, podem ser representadas por meio de uma árvore de cenários. A construção dessa árvore é uma etapa muito importante da modelagem, dado que a mesma é responsável por aproximar o processo estocástico das variáveis aleatórias. Existem diversas maneiras para a geração de cenários, tais como técnicas de amostragem, métodos estatísticos, simulações de processos, entre outros métodos (MITRA, 2008).

A construção da árvore de cenários é um tema bastante vasto e não é o foco deste trabalho. Portanto, em vez de se considerar as inúmeras possibilidades das variáveis aleatórias, assume-se que os cenários são gerados com base em conhecimento de especialistas, considerando, por hipótese, que um número reduzido é suficiente para representar as diferentes condições operativas. Assim, pode-se ter um número total de cenários de magnitude modesta, de tal maneira que o problema associado possa ser resolvido com um esforço computacional razoável, pois mesmo quando consideram-se poucos cenários é possível obter políticas mais

robustas quando comparada com a análise de um único cenário (caso determinístico).

Dadas as características do problema e as simplificações adotadas, neste trabalho utiliza-se um modelo de otimização estocástica bastante conhecido na literatura, denominada de formulação de dois estágios. Em problemas de otimização estocástica de dois estágios as decisões podem ser divididas em dois grupos: o conjunto de decisões de primeiro estágio, aquelas que devem ser tomadas antes do evento aleatório ocorrer; e o conjunto das decisões de segundo estágio, que são determinadas depois do evento aleatório ocorrer.

A Figura 2 ilustra um exemplo de árvore de cenários para um problema de dois estágios. Nessa estrutura, cada nó (círculo preenchido) representa uma realização específica da variável aleatória, ξ_n , referente ao índice do nó n . Adicionalmente, o caminho do nó de primeiro estágio até qualquer um dos nós de segundo estágio é denominado de cenário; neste caso, tem-se cinco cenários. Assume-se que a realização do primeiro estágio é previamente conhecida; no entanto, no segundo estágio pode-se ter diferentes valores de realizações, conforme destacado na Figura 2.

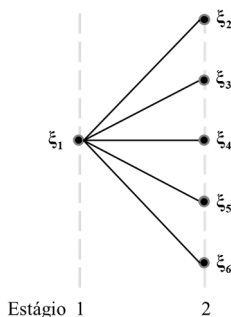


Figura 2: Árvore de Cenários.

Um ponto importante que deve-se destacar é que, em geral, somente a solução de primeiro estágio tem um valor prático, pois ela representa a decisão a ser tomada.

Dado que não é possível antecipar qual realização vai ocorrer, a decisão de primeiro estágio deve ser única para todas as realizações do segundo estágio. Essa condição é chamada de não antecipatividade. A Figura 3 apresenta uma outra maneira de representar a mesma árvore de cenários ilustrada anteriormente. Neste caso, os cenários são representados explicitamente e o conceito de não antecipatividade é

ilustrado pela linha vermelha pontilhada, que vincula as decisões entre os cenários.

Assim, as realizações da árvore de cenários podem ser representadas de duas formas, de acordo com a estratégia de solução adotada. Por exemplo, na metodologia chamada de Decomposição Aninhada (BIRGE, 1982), divide-se o problema original em subproblemas, um para cada nó da árvore; portanto, o modelo matemático mais adequado para a aplicação desta metodologia de solução corresponde à árvore mostrada na Figura 2. Por outro lado, no método de *Progressive Hedging* ou quando utiliza-se a RL com a abordagem de decomposição por cenários a árvore utilizada é aquela apresentada na Figura 3, em que as restrições de não antecipatividade são tratadas explicitamente. Neste caso cada nó é identificado por um número, no entanto suas realizações possuem o mesmo valor ($\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5$).

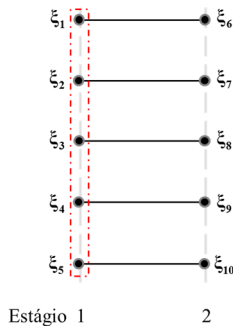


Figura 3: Representação por cenários e não antecipatividade (linhas em pontilhado).

Conforme citado anteriormente, para cada estágio tem-se um conjunto de decisões. Em muitos problemas de pesquisa operacional essas decisões são consecutivas em intervalos de tempo diferentes. Assim, um estágio da árvore de cenários da Figura 2 pode conter uma sequência de decisões e eventos, conforme ilustrado na Figura 4. Nesse contexto, tem-se um conjunto de realizações para cada estágio. Portanto, é muito importante diferenciar os conceitos de estágio e período de tempo do problema. O primeiro depende da ocorrência do evento aleatório, enquanto que o segundo representa cada intervalo de tempo do problema. Por exemplo, na Figura 4 cada estágio tem um dia de duração e é dividido em seis períodos de tempo, com cada período t representando quatro horas.

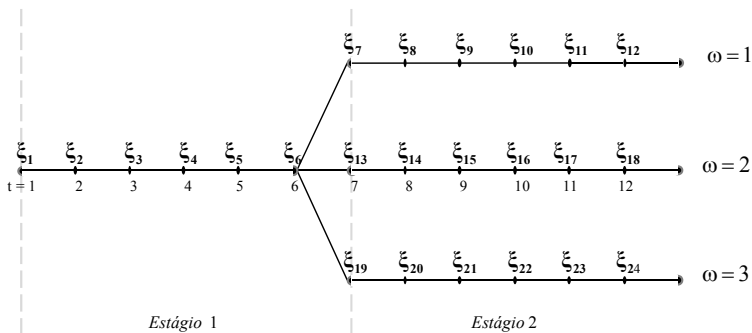


Figura 4: Árvore de cenários de dois estágios.

Na estrutura da árvore apresentada na Figura 4, o nó 1, referente ao período de tempo 1, é o nó raiz. Exceto o nó raiz e os nós referentes aos últimos períodos da árvore, todos os outros nós tem um nó ascendente e um conjunto de nós descendentes. O nó imediatamente ascendente ao nó n é definido como n_{-1} com probabilidade de transição de $p^{n/n_{-1}}$, isto é, a probabilidade do nó n ser descendente de n_{-1} . As probabilidades dos nós são dadas recursivamente por $p^1 = 1$ e $p^n = p^{n/n_{-1}} \cdot p^{n_{-1}}$, $n > 1$. De maneira genérica, o nó ascendente ao nó n em t intervalos de tempo atrás é n_{-t} . O conjunto de nós imediatamente descendentes ao nó n é denominado de $N_{+1}(n)$ e os nós com $N_{+1}(n) = \emptyset$ são os nós de final de horizonte, chamados de nós folhas. O conjunto de nós folhas de toda a árvore é denominado de N_L . O caminho do nó raiz a qualquer nó folha representa um cenário, enumerados pelo índice ω , e $N(\omega)$ representa o conjunto de todos os nós do cenário ω . A probabilidade associada a cada cenário é igual à probabilidade do último nó pertencente ao cenário em questão, ou seja, o nó folha. Para diferenciar os estágios do problema, T_1 é o último período, ou intervalo de tempo, do estágio 1 e, de maneira similar, T_2 é o último período do estágio 2. Por fim, cada nó representa a duração de um período de tempo e N_t representa o conjunto de todos os nós do período t . Consequentemente, a árvore da Figura 4 tem 24 nós e três cenários, cujos nós folhas são o 12, o 18 e o 24 e $T_1 = 6$ e $T_2 = 12$.

2.3 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE DOIS ESTÁGIOS

Nesta seção apresentam-se duas maneiras de modelar matematicamente os problemas de otimização estocástica de dois estágios: formulação por nós e formulação por cenários.

Para tornar a resolução de problemas estocásticos de grande porte viável, faz-se necessário considerar uma FDP discreta ou contínua discretizada; assim, o modelo matemático pode ser formulado como um problema de otimização de grande porte, também conhecido como Equivalente Determinístico (ED) (BIRGE; LOUVEAUX, 2011). O ED pode ser formulado tanto para a abordagem por nós, referente à árvore da Figura 2, quanto para a abordagem por cenários, referente à árvore da Figura 3.

Inicialmente, apresenta-se a formulação por nós, baseada nas definições descritas no final da seção anterior. Assim, considerando uma FDP conhecida e um modelo linear contínuo tem-se o seguinte modelo do ED para a árvore de cenários da Figura 4.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{n=1}^N p_n \cdot c'_n \cdot x_n \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \sum_{t=0}^{T_2-1} A_{n-t}^n \cdot x_{n-t} \geq b_n, \quad n = 1, \dots, N, \\ & x_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

em que:

- n é o índice do nó da árvore de cenários;
- N é o número total de nós da árvore de cenários;
- p_n é a probabilidade associada ao nó n (escalar);
- c_n é o vetor de custos das decisões do nó n ;
- $'$ é o símbolo que indica vetor transposto;
- x_n é o vetor de variáveis de decisão do nó n ;
- T_2 é o último período do estágio 2;
- A_{n-t}^n é a matriz das restrições do nó n ; quando $t = 0$, $n_0 = n$, ou seja, o índice refere-se ao próprio nó n ;
- b_n é o vetor de constantes das restrições, podendo conter elementos que representam as variáveis aleatórias.

Neste trabalho a modelagem (1) também é chamada de ED implícito, pois as restrições de não antecipatividade estão implicitamente representadas no modelo matemático, isto é, as decisões do estágio 1 correspondem a um único vetor de decisões.

Por outro lado, este mesmo problema pode ser modelado utilizando-se a abordagem de cenários. Neste caso, existe um vetor de

decisões de primeiro estágio para cada cenário considerado. Assim, para forçar que as decisões de primeiro estágio sejam iguais adicionam-se restrições auxiliares ao problema, ou seja, as restrições de não antecipatividade são representadas explicitamente. Assim, o modelo resultante é conhecido como ED explícito, sendo dado por:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{\omega=1}^{\Omega} p_{\omega} \cdot \sum_{n \in N(\omega)} c'_n \cdot x_n \\
 & \text{s.a :} \\
 & \sum_{t=0}^{T_2-1} \mathbf{A}_{n-t}^n \cdot x_{n-t} \geq b_n, \quad n = 1, \dots, N, \\
 & x_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N, \\
 & x_n = \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot x_{m \in N_t \cap N(\sigma)}, \quad n \in N_t \cap N(\omega), \\
 & \quad t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1,
 \end{aligned} \tag{2}$$

em que:

- ω é o índice do cenário;
- Ω é o número total de cenários;
- t é o índice do período ou intervalo de tempo;
- T_1 é o último período do estágio 1;
- p_{ω} é a probabilidade associada ao cenário ω .

Sendo que, como comentado na seção anterior, a probabilidade associada a cada cenário é igual à probabilidade do último nó pertencente ao cenário em questão, assim:

$$\sum_{\omega=1}^{\Omega} p_{\omega} = 1.$$

Note que para garantir que as variáveis de primeiro estágio sejam iguais, pode-se considerar diferentes estruturas de restrições, ou seja, as restrições de não antecipatividade podem ser consideradas de distintas formas como, por exemplo, as três alternativas abaixo.

$$\begin{aligned}
 x_n = x_m, \quad n \in N_t \cap N(\omega), \quad m \in N_t \cap N(\omega + 1), \\
 t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 x_n = x_m, \quad n \in N_t \cap N(\omega = 1), \quad m \in N_t \cap N(\omega), \\
 t = 1, \dots, T_1, \omega = 2, \dots, \Omega,
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 x_n &= y_t, & n &\in N_t \cap N(\omega), \\
 t &= 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega,
 \end{aligned} \tag{5}$$

em que:

y_t é uma variável extra adicionada ao problema, uma para cada período do primeiro estágio.

A restrição da equação (3) garante que a variável x do cenário um seja igual à variável x do cenário dois, a variável x do cenário dois seja igual à variável x do cenário três, e assim por diante para todos os períodos do estágio um. Na restrição da equação (4) garante-se que a variável x do cenário um seja igual à variável x do cenário dois, três, quatro, e assim por diante para todos os períodos do primeiro estágio. Por sua vez, a equação (5) faz com que a variável x de todos os cenários sejam iguais à variável y , para todos os períodos do estágio um.

A restrição de não antecipatividade utilizada apresentado no problema (2) garante, para todo período do primeiro estágio, que a variável x de cada cenário seja igual ao valor esperado de x (considerando todos os cenários). Neste caso, não necessita-se considerar a restrição de um dos cenários (ω vai de um à $\Omega - 1$), pois as equações são linearmente dependentes e seria redundância, tornando a matriz das restrições mal condicionada. A restrição utilizada neste trabalho é conforme apresentado no problema (2); porém, a estratégia de solução proposta também pode ser aplicada considerando as demais estruturas. Em tese, todas alternativas garantem a mesma solução e somente testes poderiam indicar um desempenho superior de uma ou outra, como este não é o foco do trabalho a escolha foi feita por conveniência.

Embora as formulações (1) e (2) sejam distintas, esses modelos são matematicamente equivalentes. Qualquer uma das duas árvores de cenários (Figura 2 ou Figura 3) pode ser usada para formular o problema, porém com número de nós diferentes e consequentemente com número de variáveis diferentes. Nesse sentido, com o objetivo de escrever uma única formulação para as restrições, o índice das variáveis é indexado à cada nó da árvore, ao invés de utilizar indexação por período de tempo, t , ou cenário ω . Desta forma, as únicas diferenças na formulação são a função objetivo e as restrições de não-antecipatividade. Note que a indexação dos nós depende do tipo de árvore usada; assim, não existe relação direta entre as variáveis de mesmo índice nos modelos (1) e (2). Por exemplo, $n = 7$ não é o mesmo nó para os dois modelos. Pelo valor

do nó, não se sabe a qual período, estágio ou cenário ele pertence, pois depende da estrutura árvore adotada.

Os problemas (1) e (2) podem ser resolvidos diretamente por um pacote de otimização em um único problema de otimização ou, quando o problema for muito grande, como é o caso da PDE, podem ser utilizadas estratégias de decomposição. Vale destacar que, além do grande porte do problema, outra complexidade envolvida é a presença de variáveis binárias em ambos os estágios. Assim, combinam-se duas características difíceis de se tratar em problemas de otimização: incertezas e variáveis inteiras. A última torna o problema não convexo, dificultando ainda mais a resolução e exigindo adequações nas metodologias de solução, usualmente desenvolvidas para aplicações no caso convexo.

Da mesma maneira que a modelagem do problema e a estrutura da árvore, os métodos de decomposição também se diferenciam dependendo da modelagem adotada para representar o problema do ED (implícito ou explícito).

No caso do problema (1), as estratégias utilizadas geralmente se baseiam na decomposição por estágios (ou por nós). Os algoritmos aplicados, em geral, são baseados na decomposição primal do problema, tais como aqueles baseados no método de Benders (BENDERS, 1962) e no *L-shaped* (VAN SLYKE; WETS, 1969). Nestes métodos, para cada solução de primeiro estágio definida pelo problema mestre, deve-se resolver os problemas de segundo estágio para todas realizações possíveis, com a decisão de primeiro estágio fixada. Então, através de um processo recursivo adicionam-se restrições no problema mestre que refletem nos custos de segundo estágio as consequências da decisão de primeiro estágio.

Por sua vez, no caso do problema (2), a estratégia adotada é conhecida como decomposição por cenários, em que geralmente aplica-se uma decomposição dual para resolver o problema. A ideia básica consiste em relaxar as restrições de não antecipatividade, dividindo o problema em subproblemas relativos a cada cenário.

Uma revisão dos principais métodos utilizados para resolver problemas de dois estágios, considerando desde problemas contínuos até inteiro-mistos, pode ser vista em Sherali e Zhu (2009).

2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme destacado neste capítulo, a árvore de cenários é usualmente utilizada para representar as realizações das variáveis aleatórias em um problema de otimização estocástica. Neste trabalho, a estrutura da árvore utilizada é apresentada na Figura 4. Nela considera-se como período a discretização temporal intrínseca da modelagem do problema, enquanto que estágio é a discretização considerada para o método de otimização estocástica.

A abordagem de se considerar vários períodos para cada estágio advém do fato de que a programação das unidades deve ser determinada hora a hora para o dia seguinte; portanto, é interessante ter uma decisão determinística para as 24 horas do dia seguinte. Como mencionado anteriormente, somente a solução ótima de primeiro estágio tem um valor único, dado que nos demais estágios tem-se uma decisão para cada realização do estágio.

No próximo capítulo são apresentados os detalhes da modelagem dos componentes do sistema, bem como, são utilizados os modelos de ED implícito e explícito para formular a PDE como um problema de otimização estocástica.

3 MODELAGEM E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 INTRODUÇÃO

O sistema hidrotérmico brasileiro possui como suas principais características longas linhas de transmissão, grande dimensão e predominância de fontes de geração hidrelétrica. Além disso, sua operação pode ser afetada pelas incertezas associadas à previsão da demanda (incluindo aqui também a imprevisibilidade na geração das usinas eólicas) e às afluências incrementais.

Assim, a operação do sistema deve ser baseada em alguma diretriz eletroenergética, que, em geral, é incluída em um modelo de otimização. Neste caso, considerando todas as particularidades do sistema hidrotérmico, o modelo de otimização resultante é de natureza estocástica, de grande porte e com não linearidades. Dado que é computacionalmente muito oneroso resolver um problema com tais características, neste trabalho são realizadas algumas simplificações na modelagem do problema com relação às características comumente encontradas em modelos determinísticos.

Inicialmente apresentam-se as modelagens dos elementos do sistema e as considerações adotadas, bem como escreve-se o modelo de otimização estocástica do problema da PDE, segundo duas abordagens, ED implícito e explícito, já mencionadas na seção anterior. Por fim, comentam-se as particularidades e complexidades na resolução de problemas desta natureza.

3.2 SISTEMA HIDROTÉRMICO

Sistemas hidrotérmicos são compostos por dois tipos de usinas de geração: termelétricas e hidrelétricas. Na primeira, obtêm-se energia elétrica por meio da transformação da energia térmica, proveniente da queima de combustíveis fósseis ou da fissão de combustíveis nucleares. Por sua vez, nas hidrelétricas, aproveita-se a energia potencial gravitacional, associada com a água armazenada nos reservatórios, para gerar energia elétrica.

Além disso, outro componente que desempenha um papel importante para o funcionamento do sistema é a rede de transmissão, a qual conduz a eletricidade desde a sua produção até as unidades de

consumo, permitindo assim que a energia elétrica seja fornecida para as demandas de diversos locais do país. Consequentemente, o sistema de transmissão interliga também as usinas entre si, o que permite explorar as complementaridades associadas ao regime hidrológico e às usinas termelétricas. Assim, é possível reduzir os custos de operação, com a diminuição de geração termelétrica sempre que houver energia hidrelétrica excedente em alguma das regiões do sistema. Adicionalmente, em períodos secos, a contribuição das usinas termelétricas é de especial importância no atendimento à demanda.

Como mencionado anteriormente, no Brasil a participação das hidrelétricas é predominante com cerca de 65% da capacidade instalada. Porém, a relação entre a sua energia produzida e o total de energia produzido pelo sistema pode superar este valor, pois dependendo da hidrologia pode-se usar muito mais hidrelétricas do que outros recursos na produção de energia.

Nas subseções seguintes, descrevem-se as modelagens adotadas para cada componente do sistema, iniciando pela descrição das usinas e, por fim, a representação da rede de transmissão e demais particularidades consideradas no modelo em estudo.

3.2.1 Usinas Hidrelétricas

As usinas hidrelétricas podem ser classificadas, de acordo com seu tipo de reservatório, como de acumulação, a fio d'água e com armazenamento por bombeamento (FORTUNATO *et al.*, 1990). Neste trabalho são consideradas as usinas dos dois primeiros grupos, pois são as mais comuns do SIN. As usinas de acumulação possuem reservatórios de tamanho suficiente para armazenar água em épocas de cheias para uso em períodos de estiagem. Por sua vez, as usinas a fio d'água também dispõem de capacidade de armazenamento; porém, essa capacidade é pequena e só pode acumular água durante alguns dias ou poucas semanas, a fim de utilizá-la em horizontes mais curtos de tempo.

Além disso, uma característica importante na operação das hidrelétricas é a maneira na qual a energia potencial da água armazenada no reservatório é transformada em energia elétrica. Esse processo de transformação é representado matematicamente por uma função de produção.

Nesse contexto, os aspectos mais importantes para se descrever a operação das usinas hidrelétricas são a modelagem dos reservatórios e das

unidades geradoras, dados pelas restrições operativas associadas à cada um de seus componentes. Na sequência, são descritas as principais equações associadas com a representação dos reservatórios e, em seguida, são apresentadas as expressões que modelam a produção de energia nas usinas hidrelétricas.

3.2.1.1 Reservatórios

Inicialmente, apresenta-se a equação que modela o balanço hídrico dos reservatórios (6). Segundo essa expressão, uma variação no volume armazenado é igual a diferença entre a vazão afluente total e a vazão defluente do reservatório. Além de expressar a conservação da massa d'água, essa equação representa ainda o acoplamento entre as usinas situadas em um mesmo rio, pois a vazão afluente total é composta pela vazão incremental mais a vazão defluente dos reservatórios localizados imediatamente a montante⁵. Portanto, a consideração dessa equação é muito importante, visto que a presença de hidrelétricas em cascata é uma situação muito comum no SIN.

$$v_{rn} - v_{rn-1} + 0,0036 \cdot \left[d_{rn} - \sum_{r^+ \in \mathfrak{R}_r^+} d_{r^+n-\tau} \right] = 0,0036 \cdot y_{rn}, \quad (6)$$

em que:

- v_{rn} é o volume do reservatório r no final do período referente ao nó n (hm^3);
- d_{rn} é a vazão defluente do reservatório r e nó n (m^3/s), sendo composta pela vazão turbinada total da usina e sua vazão vertida;
- \mathfrak{R}_r^+ é o conjunto de reservatórios imediatamente a montante do reservatório r ;
- τ é o tempo de viagem da água entre os reservatórios r^+ e r (h);
- y_{rn} é a vazão afluente incremental do reservatório r e nó n (m^3/s).

Vale destacar que o valor de 0,0036, que multiplica as variáveis de vazão, é usado para transformá-las em unidades de volume (hm^3) em um período de uma hora. Para períodos de tempo com diferentes duração deve-se multiplicar este valor pela sua razão para uma hora.

⁵ Neste trabalho os valores de evaporação e de infiltração não são considerados na equação de balanço hídrico.

Adicionalmente, deve-se considerar os limites operativos dos reservatórios, tais como volumes máximo e mínimo e a máxima vazão vertida. Esses são representados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} v_r^{\min} &\leq v_{rn} \leq v_r^{\max}, \\ s_{rn} &\leq s_r^{\max}, \end{aligned} \quad (7)$$

em que:

$$\begin{aligned} v_r^{\min(\max)} &\text{ é o volume mínimo (máximo) do reservatório } r \text{ (hm}^3\text{);} \\ s_{rn} &\text{ é a vazão vertida no reservatório } r \text{ e nó } n \text{ (m}^3\text{/s);} \\ s_r^{\max} &\text{ é a vazão vertida máxima do reservatório } r \text{ (m}^3\text{/s).} \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, alguns reservatórios podem armazenar água durante meses. Assim, torna-se essencial coordenar a operação diária do sistema com os modelos de mais longo prazo. Para isso, em geral, utilizam-se duas abordagens. Uma delas é através de uma função de custo futuro (FCF) (PEREIRA, 1989). Esta permite comparar o custo de operação resultante da utilização da água, ao longo do horizonte de estudo, com o custo de manter essa água armazenada, pois futuramente ela pode ser utilizada como alternativa à uma fonte de geração mais cara. A outra forma de coordenar os modelos é através da inclusão de metas de volume utilizando-se equações para limitar o volume armazenado ao final do horizonte de estudo. Assim, a solução da PDE deve ser tal que o volume de água armazenada nos reservatórios ao final do horizonte (próximo dia ou final da semana) seja aquela determinada em estudos de mais longo prazo. Na prática, essas duas abordagens podem resultar em soluções diferentes, pois o uso da FCF permite decisões em que o volume ao final do horizonte seja menor do que aquele decidido via metas. Neste trabalho utiliza-se a meta de armazenamento final devido à facilidade computacional, pois para gerar a FCF deve-se ter e rodar um modelo de curto prazo para cada caso. Por outro lado, as restrições de meta causam um forte acoplamento temporal no problema. Adicionalmente, destaca-se que o uso da função de custo futuro não alteraria a metodologia proposta como estratégia de solução, pois sua consideração inclui termos lineares na função objetivo e nas restrições, não alterando a estrutura dos subproblemas. As metas de volume são implementadas por meio da seguinte expressão:

$$v_{rn} \geq v_r^{\text{meta}} \quad \forall \quad n \in N_L, \quad (8)$$

em que:

$v_{r,n \in N_L}$ é o volume do reservatório r dos nós folhas, ou seja, ao final do horizonte de estudo (hm^3);

v_r^{meta} é a meta de volume final do reservatório r (hm^3).

Ainda com relação à modelagem dos reservatórios, uma importante variável associada à sua operação é a altura de queda bruta, determinada pela diferença entre seu nível de montante, fc_m , e seu nível de jusante, fc_j . A cota de montante é obtida com base no volume de água armazenada no reservatório. Por sua vez, o nível a jusante da usina é obtido com base na vazão defluente da usina e representa a cota do rio após o canal de descarga ou restituição. Neste trabalho considera-se que as turbinas são do tipo de reação, isto é, que usam a energia cinética e a pressão da água para a geração. Este tipo de turbina opera afogada e a alteração do nível de jusante afeta diretamente a altura de queda líquida da unidade. Em geral, nas usinas do sistema brasileiro, essas funções são representadas por polinômios de quarta ordem (FINARDI, 2003); portanto, a altura de queda bruta é dada pelo seguinte polinômio:

$$hb_m = fc_m - fc_j, \quad (9)$$

$$hb_m = \left(a_0 + a_1 \cdot v_m + a_2 \cdot v_m^2 + a_3 \cdot v_m^3 + a_4 \cdot v_m^4 \right) - \left(b_0 + b_1 \cdot d_m + b_2 \cdot d_m^2 + b_3 \cdot d_m^3 + b_4 \cdot d_m^4 \right),$$

em que:

hb_m é a altura de queda bruta do reservatório r e nó n (m);

$a_{0,...,4}$ são os coeficientes do polinômio de cota de montante;

$b_{0,...,4}$ são os coeficientes do polinômio de cota de jusante.

Em algumas usinas do sistema brasileiro o vertedouro é localizado distante do canal de fuga e não influencia no nível a jusante. Nestes casos, o valor da vazão vertida não é considerada no cálculo do nível de jusante na equação (9).

No entanto, nem toda essa altura de queda está disponível para a turbina produzir eletricidade, devido às perdas hidráulicas. Essas perdas ocorrem por atrito da água nos condutos forçados e podem ser modeladas por uma função quadrática dependente da vazão turbinada em cada unidade geradora (FINARDI, 2003). Assim define-se a queda líquida, ou a altura de queda disponível para geração de cada unidade, por⁶:

⁶ Existem situações, não consideradas neste trabalho, em que tem-se um conduto forçado em comum para todas as unidades. Neste caso, adiciona-se uma parcela proporcional ao quadrado da vazão turbinada na usina à Equação (10).

$$h_{krn} = hb_{rn} - hl_{kr} \cdot qu_{krn}^2, \quad (10)$$

em que:

h_{krn} é a altura de queda líquida da unidade k , reservatório r e nó n (m);

hl_{kr} é o coeficiente de perdas hidráulicas da unidade k do reservatório r (s^2/m^5);

qu_{krn} é a vazão turbinada na unidade k , reservatório r e nó n (m^3/s).

Note que a queda líquida é considerada para cada unidade geradora, pois as perdas hidráulicas podem ser diferentes.

3.2.1.2 Processo de geração de energia

Além das perdas hidráulicas, no processo de geração de energia também existem perdas devido ao rendimento hidráulico e mecânico do conjunto turbina gerador. Neste trabalho, considera-se o rendimento mecânico do conjunto turbina gerador como sendo 100%; por sua vez, o rendimento hidráulico é uma função que depende da altura de queda líquida e da vazão turbinada na unidade. Esse inter-relacionamento é complexo, sendo normalmente fornecido por tabelas de valores de rendimento, que podem ser expressas por meio de curvas de desempenho (curvas-colinas) para cada unidade geradora (mais detalhes podem ser vistos em Finardi (2003)).

Desta forma, em geral, uma representação adequada para este conjunto de dados pode ser dada por uma função quadrática estritamente côncava:

$$\rho_{krn} = c_0 + c_1 \cdot qu_{krn} + c_2 \cdot h_{krn} + c_3 \cdot qu_{krn} \cdot h_{krn} + c_4 \cdot qu_{krn}^2 + c_5 \cdot h_{krn}^2, \quad (11)$$

em que:

ρ_{krn} é o rendimento hidráulico do conjunto turbina gerador da unidade k , reservatório r e nó n ;

$c_{0,...,5}$ são os coeficientes do polinômio de rendimento hidráulico.

A partir dessas considerações, pode-se definir o processo de geração de energia. A potência produzida por uma unidade geradora é dada por:

$$phu_{krn} = G \cdot \rho_{krn} \cdot h_{krn} \cdot qu_{krn}, \quad (12)$$

em que:

phu_{krn} é a potência gerada pela unidade k , do reservatório r e nó n (MW);

G é uma constante com valor de $9,81 \times 10^{-3}$, que representa o produto do coeficiente de massa específica da água pela

aceleração da gravidade ($\text{kg/m}^2\text{s}^2$) multiplicados por 10^{-6} para converter W para MW.

De acordo com as equações (9), (10) e (11), a função (12) pode ser expressa por um polinômio de ordem 12 com relação à vazão defluente da usina e do volume do reservatório e de ordem 7 em relação à vazão turbinada na unidade.

Geralmente, no problema de PDE modelada com base em um modelo determinístico, a função de produção é representada pelo polinômio não convexo de ordem elevada (FINARDI; SILVA, 2006), conforme mostrado em (12). No entanto, visto que neste trabalho tem-se as complexidades inseridas pela modelagem estocástica, a função de produção é representada de maneira simplificada, cuja descrição é feita a seguir.

Basicamente, a simplificação da função de produção é dividida em duas etapas:

1. As unidades idênticas são consideradas como um grupo, cuja função $fphg^7$, descrita a seguir, define a produção total dessas unidades;
2. A $fphg$ é aproximada por funções lineares;

Inicialmente, as unidades idênticas (com as mesmas características, como potência máxima e mínima, rendimento hidráulico e assim por diante) são agrupadas. Assim, a função de produção do grupo pode ser facilmente determinada pela combinação do número de unidades operando. Matematicamente, a função de produção de cada grupo é dada por:

$$\begin{aligned}
 fphg(v, q, d, s) &= \max_{qu, nk} G \cdot \rho(v, d, qu) \cdot h(v, d, qu) \cdot q \\
 \text{s.a :} \\
 qu \cdot nk &= q, \\
 qu^{\min} &\leq qu \leq qu^{\max}, \\
 nk &\leq U, nk \in \mathbb{N},
 \end{aligned} \tag{13}$$

em que:

q é a vazão turbinada total no grupo de unidades (m^3/s);
 $qu^{\min(\max)}$ é a mínima (máxima) vazão turbinada na unidade (m^3/s);

⁷ Essa função relaciona as variáveis de volume, vazão turbinada e vertida e vazão defluente com a potência gerada pelo grupo.

U é o número de unidades do grupo.

Em outras palavras, o resultado em (13) é a máxima potência gerada para um determinado valor de vazão turbinada total do grupo (qu_{nk}), para um dado valor de volume e de vazão defluente e vertida. Essa função resultante depende da variável de vazão vertida, pois para algumas usinas o vertedouro está próximo do canal de fuga, influenciando no nível de jusante da usina. Por definição, neste trabalho a vazão defluente considera a vazão vertida em seu valor, assim a variável s só é considerada em (13) no caso de s não influenciar no nível de jusante.

Note que agrupar um conjunto de unidades, mesmo que idênticas, impede que as zonas proibidas de operação sejam consideradas, assim como torna impossível representar uma eventual descontinuidade natural da curva de saída das unidades, por exemplo para situações em que $qu^{\max} < 2 \cdot qu^{\min}$. Neste caso, só é possível ter um valor mínimo e um valor máximo de vazão turbinada para o grupo, sendo impossível representar as situações citadas acima. Contudo, existem poucas unidades do SIN que possuem tais características; assim, optou-se por considerar essa modelagem. Além disso, note que a simplificação não impede que cada unidade seja representada individualmente, basta considerar cada unidade como um grupo.

Vale destacar que em (13) a função de produção do grupo, $fphg$, é definida a partir dos valores das variáveis v , q , d e s ; no entanto, existem usinas em que essa função depende apenas de algumas dessas variáveis, como por exemplo q e d , caso em que o nível de montante é constante e a vazão vertida não influencia no nível do canal de fuga.

Dado que a geração é definida para um conjunto de unidades definem-se algumas restrições operativas para os grupos, em específico, os limites de vazão turbinada e de potência gerada por cada grupo.

$$\begin{aligned} phg_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} &\leq phg_{jrn} \leq phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \\ q_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} &\leq q_{jrn} \leq q_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \end{aligned} \quad (14)$$

em que:

phg_{jrn} é a potência gerada pelo grupo de unidades j do reservatório r e nó n (MW);

$phg_{jr}^{\min(\max)}$ é a mínima (máxima) potência gerada pelo grupo de unidades j do reservatório r (MW);

- z_{jrn} é a variável binária que indica se o grupo de unidades j do reservatório r está ligado (igual a 1) ou desligado (igual a 0) no nó n ;
- q_{jrn} é a vazão turbinada no grupo de unidades j , do reservatório r e nó n (m^3/s);
- $q_{jr}^{\min(\max)}$ é a mínima (máxima) vazão turbinada pelo grupo de unidades j do reservatório r (m^3/s).

Nas restrições (14), os limites para cada grupo de unidades são determinados pelos limites individuais das unidades. Consequentemente, tem-se que:

$$\begin{aligned} phg_{jr}^{\min} &= phu_{kr}^{\min}, & q_{jr}^{\min} &= qu_{kr}^{\min}, \\ phg_{jr}^{\max} &= U_{jr} \cdot phu_{kr}^{\max}, & q_{jr}^{\max} &= U_{jr} \cdot qu_{kr}^{\max}, \end{aligned} \quad (15)$$

em que:

- $phu_{kr}^{\min(\max)}$ é a mínima (máxima) potência gerada na unidade k do reservatório r (MW);
- U_{jr} é o número de unidades do grupo j do reservatório r ;
- $qu_{kr}^{\min(\max)}$ é a mínima (máxima) vazão turbinada na unidade k do reservatório r (m^3/s).

A Figura 5 ilustra a função de produção de um grupo com quatro unidades geradoras, com valores mínimos de vazão turbinada e potência gerada de $290 \text{ m}^3/\text{s}$ e 106 MW , respectivamente. Esse gráfico é construído considerando-se os polinômios apresentados anteriormente, resultando então em uma função não linear para a geração de energia (considerando a vazão vertida nula).

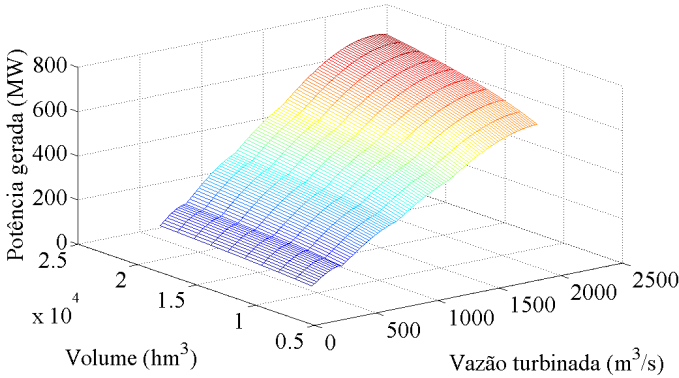


Figura 5: Função de produção de um grupo de unidades geradoras.

Na Figura 6 apresenta-se a mesma função de produção para valores fixos de volume armazenado. Nessas duas figuras é possível observar pontos de quina, em que as funções não são suaves (o valor da derivada não é contínuo), representando a alteração no número de unidades em operação.

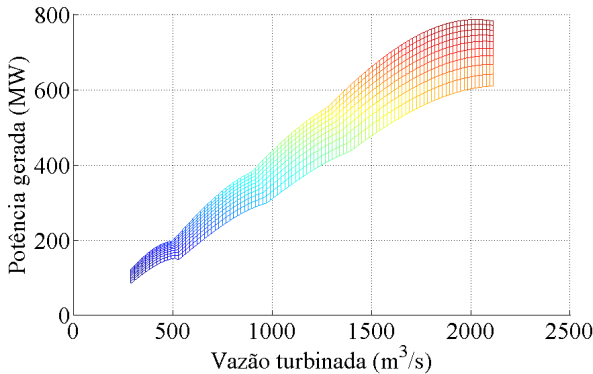


Figura 6: Função de produção de um grupo de unidades geradoras com volumes fixos.

Com essa primeira etapa da simplificação reduz-se o número de variáveis e restrições do problema, mas a função resultante ainda é não linear e não convexa. Assim, ainda é aplicada uma segunda etapa para a simplificação, que consiste em aproximar a função de produção não linear do grupo por um conjunto de funções lineares, cujo procedimento é descrito nas etapas a seguir:

- Definição do conjunto de hiperplanos: inicialmente define-se o número de funções lineares que representarão a *fphg*, ou seja, definição do tamanho (número de divisões igualmente distribuídas em cada variável - dimensão) de cada hiperplano que constituirá o conjunto final para representar a *fphg*;
- Linearização por partes da função não linear: após a definição do limites de cada divisão, aproxima-se cada região para um hiperplano linear por meio da aproximação polinomial de Taylor de grau um, com centro definido no meio do hiperplano.
- Por fim, eliminação de hiperplanos indesejáveis: dado que a *fphg* é uma função não convexa, alguns hiperplanos podem anular o valor dos demais. Assim, esses hiperplanos são removidos, por meio de uma verificação de seus valores de gradiente em relação à vazão turbinada, q .

Vale destacar que dependendo da função não linear a ser aproximada, os hiperplanos podem passar por valores negativos de potência quando a vazão turbinada é nula. Nessas situações, a geração deve assumir valores nulos, assim deve-se garantir que a restrição relativa ao hiperplano seja desativada.

A situação descrita na última etapa é ilustrada na Figura 7, com as aproximações lineares numeradas por ordem de inclusão e a curva não linear colorida. Neste caso, os hiperplanos são retas, pois a *fphg* não depende da vazão vertida e do volume do reservatório.

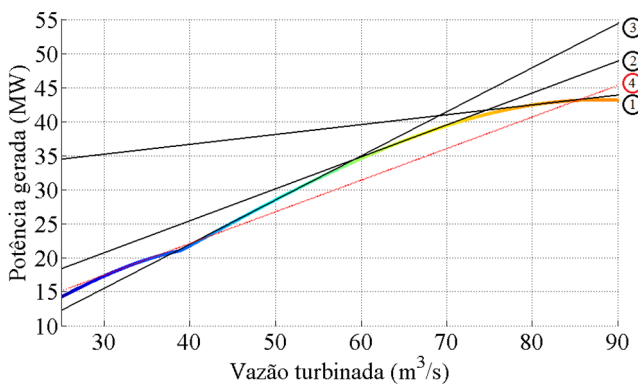


Figura 7: Ilustração do conjunto de hiperplanos da *fphg*.

Conforme pode ser observado o hiperplano em vermelho, referente à valores de baixa vazão turbinada, anula os demais hiperplanos para

valores maiores de q . Para que os hiperplanos não se anulem é utilizada uma estratégia de criá-los a partir dos maiores valores de vazão até os menores valores. Nessa ordem deve-se sempre ter um gradiente (em relação à vazão turbinada) maior que o anterior. Se o próximo gradiente for menor, o hiperplano possivelmente anularia todo ou alguma região dos demais. Consequentemente o hiperplano atual é eliminado do conjunto de hiperplanos. No caso de funções dependentes de mais de uma variável, para cada dimensão são analisados os valores do gradiente em relação à vazão turbinada, desde o valor máximo de vazão até o mínimo, caso o gradiente diminuía de um hiperplano para outro, esse último é removido da aproximação.

Por meio desta linearização por partes aproxima-se a função de produção do grupo para um conjunto de hiperplanos que depende do volume armazenado, da vazão turbinada no grupo, da vazão defluente e da vazão vertida. A Figura 8 apresenta o conjunto de funções para a mesma usina da Figura 5 (em ambas as figuras, considera-se a vazão vertida nula).

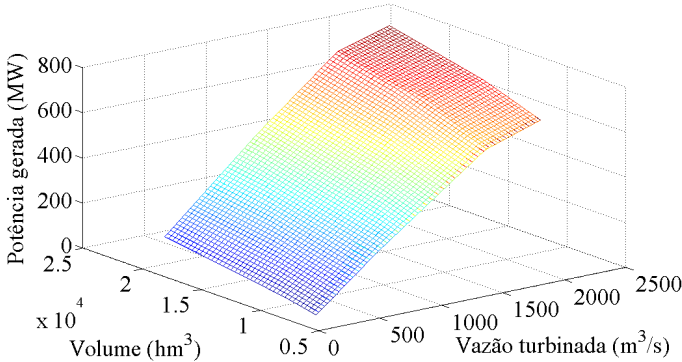


Figura 8: Função de produção de um grupo de unidades geradoras (linearizada).

Nesse sentido, a $fphg$ é composta por um conjunto de polinômios de grau um, $fphg^{ch}$, que representam a máxima produção dos grupos de unidades em uma hidrelétrica. Cada polinômio é expresso da seguinte maneira:

$$fphg^{ch}(\cdot) = g^{0,ch} + g^{1,ch} \cdot v_r + g^{2,ch} \cdot q_{jr} + g^{3,ch} \cdot d_r + g^{4,ch} \cdot s_r, \quad (16)$$

$ch \in CH$,

em que,

- $fphg^{ch}$ é a função do hiperplano ch que define a produção do grupo de unidades hidrelétricas (MW);
- $g^{0...4,ch}$ são os coeficientes da função de produção do grupo de unidades;
- ch é o índice de hiperplanos;
- CH é o conjunto de hiperplanos usados para representar a produção do grupo de unidades hidrelétricas.

Portanto a potência gerada por um grupo de unidades é limitada por um conjunto de restrições do tipo:

$$phg_{jm} \leq fphg_{jr}^{ch} (v_m, q_{jm}, d_m, s_m) + (1 - z_{jm}) \cdot M_{jr}, \quad \forall ch \in CH_{jr}, \quad (17)$$

em que,

- $fphg_{jr}^{ch}$ é a função do hiperplano ch que define a máxima produção do grupo de unidades j e do reservatório r (MW);
- M_{jr} é um valor grande (para cada grupo de unidades), que tem a função de deixar as restrições inativas quando o grupo de unidades está desligado. Neste trabalho adotou-se o valor de phg_{jr}^{\max} . Assim, a restrição não inviabiliza o problema nas situações em que a $fphg$ é negativa para valores de vazão turbinada nulos.
- CH_{jr} é o conjunto de hiperplanos usados para representar a produção do grupo de unidades j do reservatório r .

Por fim, apresentam-se algumas equações para deixar coerente a operação dos grupos de unidades em uma usina, como o balanço entre as vazões turbinadas e vertidas e o balanço de potências entre os grupos da usina hidrelétrica. Estas são dadas por:

$$d_m = s_m + \sum_{j=1}^{J_r} q_{jm},$$

$$ph_m = \sum_{j=1}^{J_r} phg_{jm}, \quad (18)$$

em que:

- J_r é o número de grupos de unidades geradoras idênticas do reservatório r ;
- ph_m é a potência gerada pela usina do reservatório r no nó n (MW).

3.2.2 Usinas Termelétricas

As usinas termelétricas produzem energia elétrica a partir do calor produzido pela queima do combustível. As fontes de calor para este processo podem ser os combustíveis fósseis (gás natural, carvão mineral, biomassa, óleo diesel) ou os combustíveis físséis (urânio, plutônio). Nas usinas termelétricas convencionais a queima desses combustíveis gera calor que aquece uma caldeira com água gerando vapor d'água em alta pressão, este por sua vez move as pás da turbina do gerador.

Todo esse processo de transformação pode ser modelado por uma relação entre suas variáveis de entrada e saída. Como entrada tem-se o consumo de calor, medido em MBtu/h, enquanto que a variável de saída é a potência gerada, expressa em MW. A partir do conhecimento do preço do combustível, em R\$/MBtu, é possível expressar a variável de entrada em unidades monetárias por hora. Assim, define-se o custo de operação das unidades termelétricas em R\$/h.

Uma curva típica (quadrática) de custo de operação de uma termelétrica é apresentada na Figura 9.

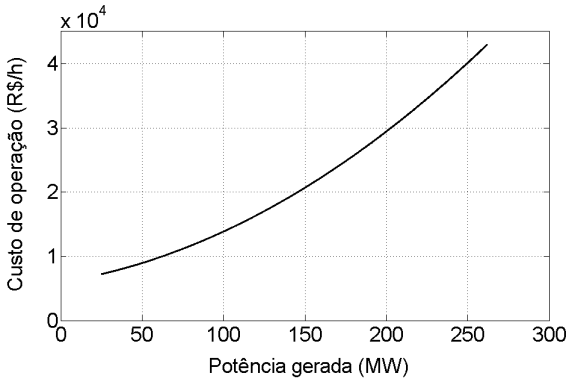


Figura 9: Função de custo de operação de uma termelétrica.

Desta forma, o custo de operação das unidades termelétricas é modelado pela seguinte função quadrática:

$$F_{in}(pf_{in}, u_{in}) = f_i^0 \cdot u_{in} + f_i^1 \cdot pf_{in} + f_i^2 \cdot pf_{in}^2, \quad (19)$$

em que:

$F_{in}(\cdot)$ é a função de custo de geração da termelétrica i do nó n (R\$/h);

pf_{in} é a potência gerada pela termelétrica i no nó n (MW);

u_{in} é a variável binária que indica se a termelétrica i está ligada (igual a 1) ou desligada (igual a 0) no nó n ;
 $f_i^{0,1,2}$ são os coeficientes da função de custo de operação da termelétrica i .

Uma prática frequentemente adotada consiste em aproximar a função ilustrada na Figura 9 por segmentos lineares, permitindo assim que a função de custo seja representada por um conjunto de retas. Tal medida se deve ao fato que problemas lineares são mais fáceis de serem resolvidos e são solucionados mais rapidamente que problemas quadráticos. Por outro lado, essa linearização por partes adiciona mais variáveis e restrições ao problema. A expressão matemática que representa essa aproximação pode ser dada por:

$$F_{in}(pf_{in}, u_{in}) = \min_{xf_i} \{ xf_i : xf_i \geq \alpha_i^{0,cf} \cdot pf_{in} + \alpha_i^{1,cf} \cdot u_{in}, cf \in CF_i \}, \quad (20)$$

em que:

xf_i é o valor do custo de geração da termelétrica i (R\$/h);
 $\alpha_i^{0/1,cf}$ são os coeficientes da reta cf da termelétrica i ;
 cf é o índice da retas;
 CF_i é o conjunto de retas utilizado na aproximação da termelétrica i .

Neste trabalho utiliza-se a equação (20), cujos coeficientes, α , que compõem as retas são definidos em (21), de acordo com o trabalho de Frangioni e Gentile (2005). Os autores mostram que usando o método denominado de *perspective cuts* pode-se obter melhoras significativas no desempenho do algoritmo de solução. No trabalho de Frangioni *et al.* (2009) os autores aplicam essa aproximação em sistemas hidrotérmicos realistas (usando uma modelagem clássica) e apresentam as vantagens de seu uso com relação ao método padrão de linearização por partes, assim como propõem uma estratégia de adicionar os cortes dinamicamente. Em Ennes e Diniz (2014) também fazem uso da inclusão dinâmica de cortes para custos de geração térmica.

$$\begin{aligned} \alpha_i^{0,cf} &= 2 \cdot f_i^2 \cdot \left(\left(\underline{pf}_i^{cf} + \overline{pf}_i^{cf} \right) / 2 \right) + f_i^1, \\ \alpha_i^{1,cf} &= f_i^0 - f_i^2 \cdot \left(\left(\underline{pf}_i^{cf} + \overline{pf}_i^{cf} \right) / 2 \right)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

em que:

\underline{pf}_i^{cf} é o maior valor de pf no intervalo cf da termelétrica i ;
 \overline{pf}_i^{cf} é o menor valor de pf no intervalo cf da termelétrica i .

Uma ilustração dessa aproximação, com o valor de $u = 1$, é apresentada na Figura 10.

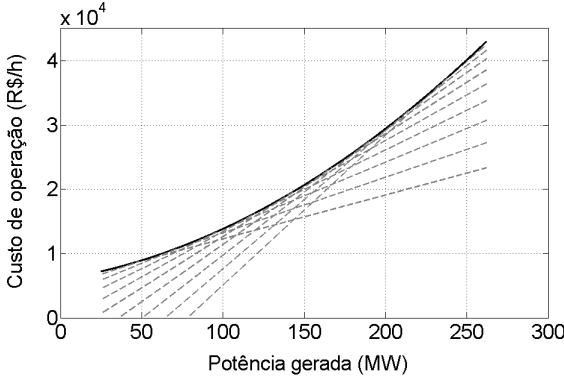


Figura 10: Aproximação linear por partes para a função de custo de operação de uma termelétrica.

Adicionalmente, as usinas termelétricas também apresentam outra característica importante que corresponde aos seus custos de partida. Em geral, esses custos dependem da temperatura e do tempo em que a usina foi desligada (WOOD; WOLLENBERG, 1984). Por simplificação, neste trabalho considera-se apenas um valor constante do custo para cada partida, sendo valorada na função objetivo por meio de uma variável binária.

$$CP_{in}(up_{in}) = f_i^3 \cdot up_{in} \quad (22)$$

em que:

up_{in} é a variável binária que representa a partida da termelétrica i e nó n , sendo igual a 1 quando a usina é ligada no nó n e 0 para qualquer outra condição; estas condições são definidas pela expressão em (23);

f_i^3 é o custo de partida da termelétrica i (R\$);

$CP_{in}(\cdot)$ é a função de custo de partida da termelétrica i e nó n (R\$).

Além da variável que indica quando a usina termelétrica foi ligada existe ainda outra variável binária para indicar quando ela é desligada, ud . Essa formulação é baseada no modelo proposto por Morales-España *et al.* (2013b) (também em seus trabalhos mais recentes Morales-España *et al.* (2015; 2013a)), cuja relação entre as variáveis binárias é expressada pela seguinte restrição:

$$u_{in} - u_{in-1} = up_{in} - ud_{in}, \quad (23)$$

em que:

ud_{in} é a variável binária que representa o desligamento da termelétrica i e nó n , sendo igual a 1 quando a usina é desligada no nó n e 0 para qualquer outra condição.

Note que na Figura 9 e na Figura 10 o valor da potência gerada é limitada superior e inferiormente. Os níveis máximos dependem das características nominais do gerador; por sua vez, os níveis mínimos estão relacionados com uma série de fatores, tais como questões de estabilidade do ciclo termodinâmico, consumo de combustível secundário nas usinas a carvão e devido à contratos de consumo mínimo com o fornecedor de combustível.

Desta forma, deve-se incluir no modelo valores que limitem a região de despacho para as unidades termelétricas. As equações (24) e (25) representam os limites máximos e mínimos de geração.

$$0 \leq pt_{in} \leq pt_i^{\max} - pt_i^{\min}, \quad (24)$$

Para termelétricas com $t_i^{up} = 0$:

$$\begin{aligned} pt_{in} &\leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in}), \\ pt_{in} &\leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - ud_{in+1}), \end{aligned} \quad (25)$$

Para termelétricas com $t_i^{up} \geq 1$:

$$pt_{in} \leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in} - ud_{in+1}),$$

em que:

pt_{in} é a potência gerada acima de pt^{min} da termelétrica i no nó n (MW);

$pt_i^{\min(\max)}$ é a potência mínima (máxima) gerada pela termelétrica i durante o período t (MW);

t_i^{up} é o número mínimo de períodos em operação que a termelétrica i deve permanecer ligada após o período em que foi ligada (h).

As restrições em (25) limitam a geração da termelétrica em seu valor mínimo para os períodos em que esta é ligada e desligada. Assim, mesmo atendendo outras restrições a usina deve gerar em seu nível mínimo no período em que começa fornecer energia e um período antes de parar de fornecer energia ao sistema.

De acordo com (24) a região viável da variável de geração termelétrica é deslocada, para evitar a descontinuidade entre zero e seu

valor mínimo, pois conforme demonstrado por Morales-Espana *et al.* (2013a) essa prática, em conjunto com as demais restrições, facilita a resolução do problema. Consequentemente, para manter a coerência da modelagem, a geração da usina é dada por $pt+u \cdot pt^{min}$, e assim pf deve ser substituído por $pt+u \cdot pt^{min}$ nas equações (19) e (20).

Além disso, a operação de uma termelétrica possui uma série de restrições relacionadas à natureza termodinâmica do processo de transformação de energia. Nesse sentido, além dos limites operativos, neste trabalho, algumas outras restrições são consideradas, como por exemplo as rampas de incremento/decremento de geração e os tempos mínimos de permanência em operação e fora de operação.

As restrições de rampa representam a máxima taxa de variação de potência permitida entre dois períodos consecutivos quando a termelétrica está em operação nominal, isto é, operando dentro de seus limites nominais de geração. Assim, os limites de incremento/decremento de potência são modelados matematicamente como restrições que acoplam temporalmente o problema, como podem ser observados a seguir.

$$\begin{aligned} pt_{in} - pt_{in-1} &\leq \Delta_i^{up}, \\ -pt_{in} + pt_{in-1} &\leq \Delta_i^{down}, \end{aligned} \quad (26)$$

em que:

$\Delta_i^{up(down)}$ é o máximo incremento (decremento) na geração entre dois períodos consecutivos (MW/h).

Por sua vez, as restrições de tempos mínimos de permanência em operação e fora de operação devem assegurar que exista um número mínimo de períodos de tempo no qual, invariavelmente, as unidades permaneçam ligadas ou desligadas, respectivamente. Nesse sentido, as equações abaixo refletem esse comportamento.

$$\sum_{na=\max(1, n-t_i^{up})}^n up_{i,na} \leq u_{in}, \quad (27)$$

$$\sum_{na=\max(1, n-t_i^{down})}^n ud_{i,na} \leq 1 - u_{in}, \quad (28)$$

em que:

$t_i^{up(down)}$ é o número mínimo de períodos em (fora de) operação que a termelétrica i deve permanecer ligada (desligada) após o período em que foi ligada (desligada) (h).

3.2.3 Demais elementos do sistema

Como mencionado no início deste capítulo, além das considerações com relação às usinas de geração, outro componente do sistema que também deve ser incluído na modelagem é a rede de transmissão. Muitas vezes, a capacidade das linhas de transmissão impede que o uso dos recursos seja da forma mais econômica, impedindo a transferência de grandes quantidades de energia de uma região à outra.

Nesse sentido, as equações de fluxo de potência são utilizadas para modelar as redes de transmissão e considerá-las no problema da PDE. Originalmente, essas equações resultam em uma formulação não linear. No entanto, visto que neste trabalho tem-se as complexidades inseridas pela modelagem estocástica, adota-se um modelo simplificado para a rede, o modelo de fluxo DC, utilizando uma formulação compacta linear para a mesma, a qual considera as seguintes premissas:

- Os módulos das tensões em todas as barras são iguais a 1,0 p.u.;
- As resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são desprezadas;
- As aberturas angulares correspondentes aos ramos da rede são pequenas de modo que $\sin(\theta) \approx \theta$ em radianos.

Apenas essas premissas garantem que as restrições para representar a rede sejam lineares, entretanto, ainda seria necessário considerar mais um tipo de variável de decisão, correspondente ao ângulo de tensão nas barras. Em uma rede de transmissão típica o número de barras é muito maior que o número de geradores. Assim, neste trabalho utiliza-se a formulação de fluxo DC compacta da rede apresentada por Scott e Matinho (1979) e usada em problemas de alocação de unidades por Tseng *et al.* (1999). Neste caso, o esforço computacional pode ser reduzido reescrevendo as equações de rede em termos somente das variáveis de geração, não sendo necessário considerar uma variável de ângulo para cada barra do sistema.

Assim, para cada nó n tem-se uma equação de balanço de potência, em que o somatório de geração deve ser igual à demanda do sistema, e os limites das linhas de transmissão, definidos, respectivamente, como:

$$\sum_{b=1}^B \sum_{r \in R_b} p h_{r,n} + \sum_{b=1}^B \sum_{i \in I_b} p t_{i,n} + u_{i,n} \cdot p t_i^{\min} + \sum_{b=1}^B \text{def}_{b,n} = \sum_{b=1}^B D_{b,n}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 -f_l^{\max} &\leq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} p h_r + \sum_{i \in I_b} (p t_{in} + u_{in} \cdot p t_i^{\min}) + def_{bn} - D_{bn} \right), \\
 f_l^{\max} &\geq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} p h_r + \sum_{i \in I_b} (p t_{in} + u_{in} \cdot p t_i^{\min}) + def_{bn} - D_{bn} \right),
 \end{aligned} \tag{30}$$

em que:

- B é o número total de barras do sistema;
- R_b é o conjunto de índices das usinas hidrelétricas que pertencem à barra b ;
- I_b é o conjunto de índices das usinas termelétricas que pertencem à barra b ;
- def_{bn} é a variável que representa o déficit de potência da barra b no nó n (MW);
- D_{bn} é o valor da demanda da barra b e nó n (MW);
- f_l^{\max} é a capacidade máxima de transporte de energia da linha de transmissão l (MW);
- Γ_{lb} é o fator de distribuição de fluxo da linha de transmissão l devido à injeção líquida de potência na barra b .

O fator de distribuição de fluxo da linha de transmissão utilizado na equação (30), Γ_{lb} , é obtido por meio da manipulação das equações de fluxo nas linhas, balanço de potência nas barras e matrizes de incidência, conforme descrito por Van Den Bergh *et al* (2014). O valor de Γ_{lb} depende das reatâncias das linhas e representa a sensibilidade do fluxo no circuito l com respeito a uma variação na injeção líquida de potência (geração menos a demanda) na barra b . Os fatores de sensibilidade com respeito à barra de referência são iguais a zero, ou seja, uma variação na injeção nesta barra não afeta os fluxos, pois o valor da geração na barra de referência se calcula implicitamente a partir da equação de balanço de geração, (29).

Note que para cada nó n existe somente uma restrição (29) e uma restrição (30) para cada linha do sistema de transmissão. Adicionalmente, em (29) o déficit de energia é representado matematicamente por uma fonte de geração cara, que deve ser incluída em toda barra do sistema, com custo linear de geração penalizado na função objetivo e capacidade para atender toda a carga de cada barra. Essa variável é considerada a fim de valorar o custo de um possível corte de carga ou racionamento devido à insuficiência na oferta de energia. Consequentemente ela também evita

inviabilidades na resolução do problema, visto que dependendo dos dados de entrada, a única solução seria não atender a demanda.

Além disso, como forma de aumentar a segurança do suprimento de energia e complementando a restrição de atendimento à demanda é considerado o requisito de reserva girante do sistema (também conhecido como reserva de potência operativa). O objetivo da reserva é compensar eventos inesperados (aumento súbito de demanda, saída de operação de unidades geradoras) dentro de um curto período de tempo. Esse valor de reserva é definido como a quantidade total de geração disponível de todas as unidades sincronizadas (em operação) no sistema, subtraída da carga do momento. No Brasil essa energia de reserva é quase que totalmente suprida por usinas hidrelétricas que participam do Controle Automático de Geração (CAG), devido sua rápida tomada de carga. Assim, nessa restrição considera-se somente os grupos de unidades hidrelétricas em operação, sendo representada pela seguinte expressão.

$$\sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) \geq Res_n, \quad (31)$$

em que:

Res_n é o valor da reserva girante necessária do nó n (MW).

3.3 PROGRAMAÇÃO DIÁRIA DA OPERAÇÃO ELETROENERGÉTICA

Nesta seção apresenta-se o modelo de otimização estocástica para o problema da PDE. Nesse sentido, utiliza-se um modelo de dois estágios com uma árvore de cenários semelhante à Figura 4. De acordo com o que foi apresentado na Seção 2.3, o ED de problemas de otimização estocástica pode ser modelado de duas maneiras, dependendo da metodologia de solução escolhida: decomposição por nós ou por cenários. Na primeira usa-se o modelo do ED implícito (1), enquanto que a segunda é aplicada no problema do ED explícito (2). Assim, considerando as expressões matemáticas descritas nas seções anteriores, apresentam-se essas duas formulações aplicadas ao problema da PDE.

No problema modelado neste trabalho, o objetivo consiste em determinar os níveis de geração de hidrelétricas e termelétricas que minimizem o custo esperado de operação durante o horizonte de estudo (geralmente de um dia a uma semana). A função objetivo do problema é o custo total esperado, composto por três termos. O primeiro é dado pelo

custo de operação em carga nominal das termelétricas, expresso por funções lineares por partes, que dependem de seu nível de geração e de seu estado operativo (ligado ou desligado). Por sua vez, o segundo é associado com o custo de partida das termelétricas. Por último, tem-se as penalidades, devido ao não atendimento da demanda em cada barra do sistema e à violação dos níveis metas de volume final dos reservatórios. O déficit é um fenômeno que realmente pode acontecer na operação do sistema, acarretando em altos custos, assim sua penalização tem a finalidade de representar essas situações. A penalidade por violação do volume meta (igual para todas usinas) tem o objetivo de respeitar as diretrizes do planejamento de curto prazo, sua consideração pode distorcer a otimalidade, porém evita soluções inviáveis do problema. Por exemplo, se as metas de volume final forem impossíveis de serem respeitadas, encontra-se uma solução para o problema, mais cara, porém viável. Com essa solução pode-se verificar qual das usinas teve sua meta violada e tomar uma ação para alterá-la. Adicionalmente observou-se que os resultados numéricos não são afetados ao considerar uma variável de folga, sua respectiva penalidade, na restrição de meta de volume.

Antes de apresentar a formulação do problema é importante destacar que para cada nó ou período de tempo a incerteza do problema é dada por um vetor de variáveis aleatórias. Considerando por exemplo a árvore da Figura 4, a realização do nó n , ξ_n , tem os seguintes vetores:

$$\xi_n = \{y_{1n}, \dots, y_{Rn}, D_{1n}, \dots, D_{Bn}\}, \quad (32)$$

em que:

y_{rn} é a vazão afluente incremental do reservatório r associada ao nó n (m^3/s). Com $r = 1, \dots, R$;

D_{bn} é o valor da demanda líquida (demanda menos geração eólica) da barra b associada ao nó n (MW). Com $b = 1, \dots, B$.

Nesse contexto, com base na formulação por nós, o ED com as restrições de não antecipatividade implícitas é dado pelo seguinte problema.

$$\begin{aligned} \min f_{\text{EDI}} = & \sum_{n=1}^N p_n \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \\ & \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

sujeito a:

$$v_{rn} - v_{rn-1} + 0,0036 \cdot \left[d_{rn} - \sum_{r^+ \in \mathfrak{R}_r^+} d_{r^+ n-\tau} \right] = 0,0036 \cdot y_{rn}, \quad \forall n, r \quad (34)$$

$$v_r^{\min} \leq v_{rn} \leq v_r^{\max}, \quad \forall n, r \quad (35)$$

$$v_{rn} + vfol_{rn} \geq v_r^{meta} \quad \forall n \in N_L, r \quad (36)$$

$$vfol_{rn} \geq 0, \quad \forall n \in N_L, r \quad (37)$$

$$phg_{jrn} \leq fphg_{jrn}^{ch} (v_{rn}, q_{jrn}, d_{rn}, s_{rn}) + (1 - z_{jrn}) \cdot phg_{jrn}^{\max}, \quad ch \in CH_{jr}, \forall n, r \quad (38)$$

$$d_{rn} = s_{rn} + \sum_{j=1}^{J_r} q_{jrn}, \quad \forall n, r \quad (39)$$

$$ph_{rn} = \sum_{j=1}^{J_r} phg_{jrn}, \quad \forall n, r \quad (40)$$

$$phg_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq phg_{jrn} \leq phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \quad (41)$$

$$q_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq q_{jrn} \leq q_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \quad (42)$$

$$s_{rn} \leq s_r^{\max}, \quad \forall n, r \quad (43)$$

$$z_{jrn} \in \{0, 1\}, \quad \forall n, j, r \quad (44)$$

$$F_{in} \geq \alpha_i^{0,cf} \cdot (pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}) + \alpha_i^{1,cf} \cdot u_{in}, \quad cf \in CF_i, \forall n, i \quad (45)$$

$$u_{in} - u_{in-1} = up_{in} - ud_{in}, \quad \forall n, i \quad (46)$$

$$\sum_{na=\max(1, n_{-i}^{up})}^n up_{i,na} \leq u_{in}, \quad \forall n, i \quad (47)$$

$$\sum_{na=\max(1, n_{-i}^{down})}^n ud_{i,na} \leq 1 - u_{in}, \quad \forall n, i \quad (48)$$

$$pt_{in} - pt_{in-1} \leq \Delta_i^{up}, \quad \forall n, i \quad (49)$$

$$-pt_{in} + pt_{in-1} \leq \Delta_i^{down}, \quad \forall n, i \quad (50)$$

$$0 \leq pt_{in} \leq pt_i^{\max} - pt_i^{\min}, \quad \forall n, i \quad (51)$$

$$pt_{in} \leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in}), \quad \forall n, i, t_i^{up} = 0, \quad (52)$$

$$pt_{in} \leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - ud_{in+1}), \quad \forall n, i, t_i^{up} = 0, \quad (53)$$

$$pt_{in} \leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in} - ud_{in+1}), \quad \forall n, i, t_i^{up} \geq 1, \quad (53)$$

$$u_{in}, up_{in}, ud_{in} \in \{0, 1\}, \quad \forall n, i \quad (54)$$

$$\sum_{b=1}^B \sum_{r \in R_b} ph_{rn} + \sum_{b=1}^B \sum_{i \in I_b} pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min} + \sum_{b=1}^B def_{bn} = \sum_{b=1}^B D_{bn}, \quad \forall n \quad (55)$$

$$-f_l^{\max} \leq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} ph_{rn} + \sum_{i \in I_b} pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min} + def_{bn} - D_{bn} \right), \quad \forall n, l \quad (56)$$

$$f_l^{\max} \geq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} ph_{rn} + \sum_{i \in I_b} pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min} + def_{bn} - D_{bn} \right), \quad \forall n, l$$

$$\sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) \geq Res_n, \quad \forall n \quad (57)$$

em que:

- n é o índice do nó da árvore de cenários;
- N é o número total de nós da árvore de cenários;
- p_n é a probabilidade associada ao nó n ;
- i é o índice associado às usinas termelétricas;
- I é o total de usinas termelétricas;
- F_{in} é o custo de geração da termelétrica i (R\$/h);
- f_i^3 é o custo de partida da termelétrica i (R\$);
- up_{in} é a variável binária que representa a partida da termelétrica i e nó n , sendo igual a 1 quando a usina é ligada no nó n e 0 para qualquer outra condição;
- C_{def} é um custo de déficit de energia do sistema (R\$/MW);
- b é o índice associado às barras do sistema de transmissão;
- B é o total de barras do sistema;
- def_{bn} é a variável que representa o déficit de energia da barra b no nó n (MW);
- N_L é o conjunto de nós folhas da árvore de cenários;
- r é o índice associado às usinas hidrelétricas;
- R é o total de usinas hidrelétricas;
- C_{vfol} é a penalidade por violação do volume meta (R\$/hm³);
- $vfol_{rn}$ é a variável de folga do volume armazenado no reservatório r e nó n (hm³);
- v_{rn} é o volume final do reservatório r no nó n (hm³);
- d_{rn} é a vazão defluente do reservatório r no nó n (m³/s), sendo composta pela vazão turbinada total da usina e sua vazão vertida;

r^+	é o índice associado aos reservatórios imediatamente a montante;
\Re_r^+	é o conjunto de reservatórios imediatamente a montante do reservatório r ;
τ	é o tempo de viagem da água entre os reservatórios r^+ e r (h);
y_m	é a vazão afluente incremental do reservatório r e nó n (m^3/s);
$v_r^{\min(\max)}$	é o volume mínimo (máximo) do reservatório r (hm^3);
v_r^{meta}	é a meta de volume final do reservatório r (hm^3);
phg_{jrn}	é a potência gerada pelo grupo de unidades j do reservatório r e nó n (MW);
$fphg_{jrn}^{ch}$	é a função do hiperplano ch que define a máxima produção do grupo de unidades j do reservatório r e nó n (MW);
q_{jrn}	é a vazão turbinada no grupo de unidades j do reservatório r e nó n (m^3/s);
s_m	é a vazão vertida do reservatório r e nó n (m^3/s);
z_{jrn}	é a variável binária que indica se o grupo de unidades j do reservatório r está ligado (igual a 1) ou desligado (igual a 0) no nó n ;
$phg_{jr}^{\min(\max)}$	é a mínima (máxima) potência gerada pelo grupo de unidades j do reservatório r (MW);
ch	é o índice de hiperplanos;
CH	é o conjunto de hiperplanos usados para representar a produção do grupo de unidades hidrelétricas.
J_r	é o número de grupos de unidades geradoras idênticas do reservatório r ;
ph_m	é a potência gerada pela usina do reservatório r e nó n (MW);
$\alpha_i^{0/1,cf}$	são os coeficientes da reta cf da termelétrica i ;
cf	é o índice da retas;
CF_i	é o conjunto de retas utilizado na aproximação da termelétrica i .
pt_{in}	é a potência gerada acima de pt^{\min} da termelétrica i no nó n (MW);
u_{in}	é a variável binária que indica se a termelétrica i está ligada (igual a 1) ou desligada (igual a 0) no nó n ;

$t_i^{up(down)}$	é o número mínimo de períodos em (fora de) operação que a termelétrica i deve permanecer ligada (desligada) após o período em que foi ligada (desligada) (h);
$\Delta_i^{up(down)}$	é o máximo incremento (decremento) na geração entre dois períodos consecutivos (MW/h).
$pt_i^{\min(max)}$	é a potência mínima (máxima) gerada pela termelétrica i no nó n (MW);
R_b	é o conjunto de índices das usinas hidrelétricas que pertencem à barra b ;
I_b	é o conjunto de índices das usinas termelétricas que pertencem à barra b ;
D_{bn}	é o valor da demanda da barra b e nó n (MW);
f_l^{\max}	é a capacidade máxima de transporte de energia da linha de transmissão l (MW);
l	é o índice associado às linhas de transmissão do sistema;
Γ_{lb}	é o fator de distribuição de fluxo da linha de transmissão l devido à injeção líquida de potência na barra b ;
Res_n	é o valor da reserva girante necessária do nó n (MW).

As restrições (34)-(37) referem-se à modelagem dos reservatórios, descrita na Seção 3.2.1.1. Já as restrições (38)-(43), descritas na Seção 3.2.1.2, fazem parte da modelagem da produção de energia nas hidrelétricas. Por sua vez, as equações (45)-(53) que representam as termelétricas, descritas na Seção 3.2.2, modelam os tempos mínimos de permanência em operação e fora de operação, rampas de incremento/decremento de geração, custos de partida e os limites de potência gerada. O conjunto de restrições (55)-(57) referem-se ao balanço de potência, aos limites de fluxo de potência ativa nas linhas e aos requisitos de reserva girante do sistema, como apresentado na Seção 3.2.3. Por fim, (44) e (54) representam as restrições de integralidade do problema, isto é, que as variáveis u , up , ud e z são binárias.

No caso da formulação por cenários ou o ED explícito as variáveis relacionadas com as restrições de não antecipatividade são modeladas explicitamente, como apresentado a seguir.

$$\min f_{EDE} = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \left(\sum_{n \in N(\omega)} p_{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \sum_{n \in N(\omega) \cap N_L} p_{\omega} \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) \right) \quad (58)$$

sujeito a:

(34)-(57)

$$\begin{aligned} pt_{in} &= \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot pt_{i,m \in N_t \cap N(\sigma)}, & \forall i, n \in N_t \cap N(\omega) \\ & & t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \\ u_{in} &= \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot u_{i,m \in N_t \cap N(\sigma)}, & \forall i, n \in N_t \cap N(\omega) \\ & & t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \\ v_{rn} &= \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot v_{r,m \in N_t \cap N(\sigma)}, & \forall r, n \in N_t \cap N(\omega) \\ & & t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \end{aligned} \quad (59)$$

em que:

- ω é o índice do cenário;
- Ω é o número total de cenários;
- N_t é o conjunto de todos os nós do período t ;
- $N(\omega)$ é o conjunto de todos os nós do cenário ω ;
- T_1 é último período do primeiro estágio.

Conforme descrito no Capítulo 2 as diferenças entre as formulações implícita (33)-(57) e explícita (58)-(59), apresentadas acima, são a função objetivo e as restrições de não-antecipatividade, pois o índice das variáveis é indexado à cada nó da árvore, ao invés de utilizar indexação por período de tempo, t , ou cenário ω . Assim, as restrições representam os mesmos componentes e tem a mesma formulação matemática.

Em teoria, no modelo com ED explícito, as restrições de não antecipatividade devem ser adicionadas para todas variáveis de primeiro estágio; porém, neste trabalho isso não é feito. Adicionam-se essas restrições somente para alguns tipos de variáveis. Os resultados em Gonçalves *et al.* (2012) mostram que se esta estratégia é aplicada somente nas variáveis que definem a solução do problema, sendo que não há necessidade de aplicá-la para todas as variáveis do primeiro estágio. Em

outras palavras, fixando-se determinadas variáveis as outras podem ser obtidas indiretamente. As restrições de não antecipatividade (59) são consideradas para as variáveis que representam a geração das termelétricas e o volume armazenado das hidrelétricas.

Um detalhe importante ao se resolver um problema de otimização estocástica por meio de seu ED é o tamanho deste problema. Como ambos modelos de ED são matematicamente equivalentes, a seguir apresenta-se o tamanho do ED implícito, visto que este possui um número menor de variáveis e restrições. Além disso, o modelo explícito é formulado apenas para ser utilizado com os métodos de decomposição.

Portanto, considerando o modelo de ED implícito, problema (33)-(57) apresentado anteriormente, e alguns números extraídos do sistema brasileiro, pode-se calcular o tamanho do problema a ser resolvido. Utilizando-se os dados de um sistema baseado no caso brasileiro, com 412 unidades termelétricas⁸, 164 usinas hidrelétricas (203 grupos), 4.583 barras e 6.616 linhas de transmissão, o ED implícito tem as dimensões apresentadas na Tabela 1⁹.

⁸ Essa quantidade corresponde às usinas com capacidade superior a 8 MW (ANEEL, 2015). Em 2013, o Brasil possui 1.734 termelétricas cadastradas, porém, mais da metade com capacidade inferior a 2 MW.

⁹ Considerando 10 aproximações lineares para a função de custo de cada usina termelétrica e 8 hiperplanos para a função de produção de cada grupo de unidades hidrelétricas.

Tabela 1: Tamanho do ED implícito para um sistema de grande porte.

Horizonte de planejamento de 2 dias com 48 períodos				
Cenários	1	10	20	50
Total de var.	379.748	2.089.352	3.988.912	9.687.592
Var. binárias	69.072	379.896	725.256	1.761.336
Restrições	1.112.132	6.117.464	11.678.944	28.363.384
Horizonte de planejamento de 4 dias com 96 períodos				
Cenários	1	10	20	50
Total de var.	759.332	5.885.192	11.580.592	28.666.792
Var. binárias	138.144	1.070.616	2.106.696	5.214.936
Restrições	2.224.100	17.237.144	33.918.304	83.961.784
Horizonte de planejamento de 1 semana com 168 períodos				
Cenários	1	10	20	50
Total de var.	1.328.708	11.578.952	22.968.112	57.135.592
Var. binárias	241.752	2.106.696	4.178.856	10.395.336
Restrições	3892.052	33.916.664	67.277.344	167.359.384

Para esse sistema a capacidade de geração hidrelétrica e termelétricas é de 111.478,2 MW (75,9 %) e 35.344,0 MW (24,1 %), respectivamente.

Note que o número de variáveis excede os milhões nos casos em que apenas alguns cenários são considerados. Para os casos estocásticos as 24 horas do primeiro dia compõem o primeiro estágio e os demais períodos são do segundo estágio. Assim, utilizar diretamente pacotes de otimização comerciais para resolver o ED pode não ser uma estratégia muito boa, pois devido ao seu grande porte, esses *solvers* podem demorar muito tempo para convergir. Adicionalmente, a memória RAM necessária para armazenar simultaneamente os dados referentes à sistemas desse porte também pode ser um problema¹⁰. Nesse sentido, diferentes métodos de solução podem ser aplicados; sendo que, devido à presença de múltiplos acoplamentos, as técnicas de decomposição aparecem como uma abordagem natural. Essas técnicas, bem como, a estratégia de solução utilizada neste trabalho são descritas no capítulo seguinte.

¹⁰ Armazenar as matrizes de restrição para o ED exige muito mais memória do que se armazenar uma matriz pequena para cada tipo de subproblema. Neste último caso não armazenam-se todos os dados do problema em matrizes, no entanto elas devem ser atualizadas para cada subproblema.

4 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Muitos dos problemas que envolvem decisões no tempo, tais como modelos de logística, transporte e alocação de recursos, podem ser representados por modelos de otimização. Em geral, esses problemas são de grande porte e uma classe de métodos que pode ser aplicada em sua resolução decompõe o problema, a fim de substituir a resolução do problema original pela resolução de subproblemas menores com características matemáticas diferentes, tornando todo o processo menos oneroso computacionalmente.

Nesse capítulo são apresentadas algumas técnicas de decomposição e como estas podem ser aplicadas na solução da PDE. Inicialmente são descritas algumas das técnicas de decomposição mais conhecidas da literatura e, em seguida, aplica-se a decomposição dual ao problema da PDE, utilizando-se duas abordagens diferentes: a decomposição espacial (SpcDec), resultante do uso da RL no ED implícito, e a decomposição por cenários (ScnDec), resultante da aplicação da RL no ED explícito. Em seguida, é apresentada a metodologia utilizada como RP, que é uma heurística baseada nos resultados da RL e nas técnicas de decomposição primal para produzir resultados primais viáveis. Por fim, para resumir a estratégia apresenta-se o algoritmo de solução com detalhes de todo o procedimento de resolução do problema.

4.2 MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO

A ideia de decompor os problemas é antiga e surgiu aplicada em problemas de PL de grande porte em meados dos anos 60 (DANTZIG; WOLFE, 1960). Com o passar dos anos, surgiram novas e aperfeiçoadas técnicas para diferentes tipos de problemas, algumas apresentadas neste capítulo e aplicadas ao problema da PDE. Mais detalhes dos métodos de decomposição, bem como, os conceitos básicos dessa estratégia podem ser vistos em Bertsekas (1999).

Na literatura, recomenda-se a utilização das técnicas de decomposição em problemas com uma estrutura específica, como por exemplo quando a matriz de restrições é esparsa ou facilmente separável

em blocos, isto é, apresentam somente algumas restrições que acoplam os conjuntos de blocos.

Os métodos de decomposição se baseiam no conceito de separar o problema de grande porte em diversos subproblemas menores, resolvidos separadamente (em paralelo ou sequencialmente) e coordenados entre si por um problema mestre.

As maioria das técnicas de decomposição podem ser classificadas em dois grupos: métodos primais ou duais. O primeiro grupo é baseado na divisão do problema primal original, enquanto que o último é baseado na decomposição do problema dual, obtido por meio da RL (BERTSEKAS, 1999). Na Figura 11 tem-se uma ilustração do processo de decomposição de ambos os grupos, em que os subproblemas são coordenados por um problema de nível superior por meio de algum tipo de estratégia (preços ou recursos).

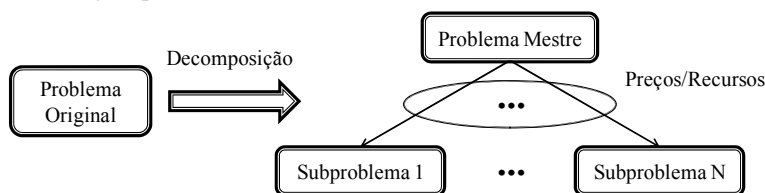


Figura 11: Ilustração das decomposições dual e primal.

O método de decomposição primal corresponde à uma direta alocação de recursos, visto que o problema mestre aloca os recursos existentes fixando para cada subproblema algumas variáveis primais. Essa estratégia é apropriada quando o problema tem variáveis primais que acoplam as decisões de tal forma que, fixando-as em alguns valores, o restante do problema de otimização se separa em diversos subproblemas com certo grau de facilidade para serem resolvidos.

Por outro lado, nos métodos duais, as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange, também chamados de preços) são utilizadas para estabelecer a troca de informações entre os subproblemas, em que o problema mestre ajusta os preços e cada subproblema aloca os recursos de acordo com os preços definidos. Este tipo de decomposição é aplicada, em geral, quando o problema tem muitas restrições que acoplam as decisões de tal forma que, quando relaxadas, o problema de otimização resultante se separa em diversos subproblemas.

No problema em estudo neste trabalho, a decomposição dual, em que utiliza-se a RL parece ser mais apropriada, devido à presença de

múltiplas restrições com acoplamento temporal e/ou espacial. No entanto, na RP utilizam-se alguns conceitos da decomposição primal como forma de melhorar as heurísticas propostas nesta tese.

A aplicação da RL ao problema fornece um limite inferior para o valor ótimo do problema primal, e seu resultado primal, geralmente inviável, pode fornecer bons pontos de partida para heurísticas especializadas para encontrar um resultado primal viável de boa qualidade (próximo ou igual a solução do problema). Adicionalmente fornece também uma solução pseudo primal. Em resumo, as restrições, geralmente aquelas que acoplam o problema, são transferidas para a função objetivo e multiplicadas por variáveis, denominadas multiplicadores de Lagrange. A função resultante, chamada de função dual, é côncava independentemente da convexidade do problema primal. Porém, a maximização da função dual pode não ser trivial, visto que ela é tipicamente não diferenciável e de grande porte.

Além disso, considerando a abordagem da decomposição dual, ainda tem-se diferentes formas de decompor o problema, separadas em dois grupos, conforme Figura 12. No primeiro grupo, chamado de decomposição espacial (SpcDec), separa-se o problema original de acordo com suas características físicas, como por exemplo, um subproblema para cada usina. Por outro lado, no segundo grupo, denominado aqui de decomposição por cenários (ScnDec), separa-se o problema original em subproblemas determinísticos, cada um relacionado à um cenário específico da árvore de cenários.

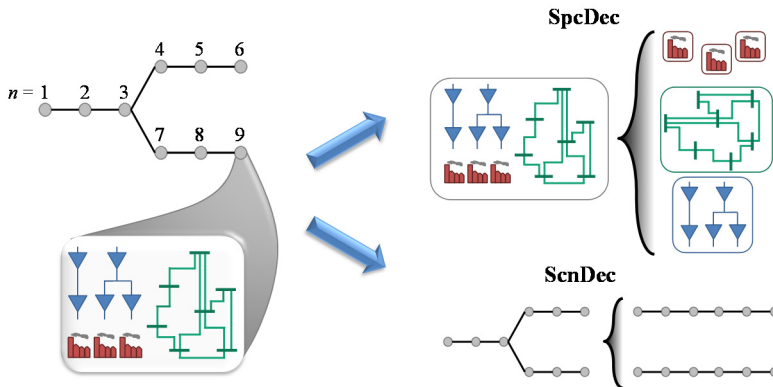


Figura 12: Ilustração da decomposição espacial e por cenários.

Nas seções seguintes descreve-se a aplicação da RL ao problema da PDE considerando a abordagem dos dois grupos citados.

4.2.1 Decomposição Espacial

Nesta estratégia decompõe-se o problema de acordo com suas características físicas, i.e., por elementos que compõem o sistema em estudo. Nesse caso, não há necessidade de representar as restrições de não antecipatividade explicitamente; portanto, a decomposição é aplicada ao ED implícito.

Considerando as características físicas de um sistema hidrotérmico a decomposição mais básica e lógica é desacoplar o problema em três conjuntos de subproblemas: um para as usinas termelétricas, um para as usinas hidrelétricas e outro para a rede de transmissão. No entanto, cada conjunto de subproblemas pode ser dividido ainda mais. Dado a grande importância de usinas hidrelétricas no sistema brasileiro, propõe-se três variantes da decomposição espacial, com atenção especial na decomposição do subproblema que representa as hidrelétricas.

O primeiro esquema de decomposição espacial, chamado de SpcDec1, separa o problema original em vários problemas de Programação Linear (PL) contínuos, representando a rede de transmissão, vários problemas de Programação Linear Inteiro-Misto (PLIM), representando as usinas termelétricas e em um único problema de PLIM acoplado no tempo e no espaço, subproblema hidrelétrico. Por sua vez, no segundo esquema, SpcDec2, aplica-se a mesma decomposição que SpcDec1 e relaxa-se a restrição de reserva girante, separando assim o

único problema de PLIM em um problema de PLIM para cada cascata de usinas. Por fim, na SpcDec3, aplica-se a SpcDec2 separando ainda mais o subproblema das hidrelétricas; desta forma o problema de PLIM para cada cascata resulta em um problema de PL, acoplado no tempo e no espaço, e vários problemas de PLIM, um para cada hidrelétrica do sistema.

Os três esquemas de decomposição espacial são ilustrados na Figura 13, para um caso exemplo com três períodos de tempo em cada estágio, dois cenários, cinco hidrelétricas (duas cascatas), três termelétricas e uma rede de transmissão com nove barras. Para cada nó do problema original, Figura 12, tem-se vários subproblemas com características diferentes.

Vale destacar que nessa estratégia busca-se relaxar os acoplamentos espaciais, conforme ilustrado na Figura 13; consequentemente ainda restam acoplamentos temporais (linha contínua entre cada nó), no entanto para alguns subproblemas esse acoplamento temporal também é eliminado pela metodologia aplicada (a linha pontilhada na Figura 13 indica que não existe acoplamento entre os nós).

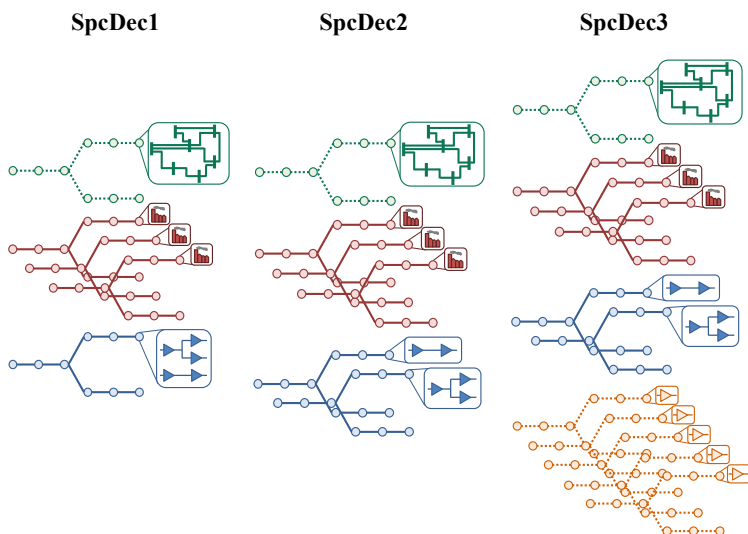


Figura 13: Ilustração das variações de decomposição espacial.

A descrição mais detalhada e a formulação dos três esquemas de decomposição espacial são apresentados a seguir.

4.2.1.1 Decomposição Espacial 1

Conforme ilustrado na Figura 12, cada nó n do problema tem acoplamento entre os componentes do sistema. Assim, as restrições do problema são separadas e agrupadas em conjuntos, de acordo com suas características. Inicialmente define-se o conjunto C_n^H , que representa as usinas hidrelétricas e o requisito de reserva girante, sendo composto pelas restrições de (34)-(44) e (57). As restrições de (45)-(54) modelam as termelétricas e compõem o conjunto C_n^T , sendo que cada termelétrica é dada pelo conjunto C_{in}^T . Por fim, as demais restrições em (55)-(56), representam o atendimento à demanda e a rede de transmissão, compondo o conjunto C_n^D . Essa divisão dos conjuntos de restrições para cada nó e o acoplamento entre as variáveis dos grupos são ilustrados na Figura 14. Note que o conjunto das termelétricas é dado para cada i , ou seja, existem I conjuntos (círculos) de restrição para cada nó. O acoplamento temporal não é ilustrado na Figura 14, porém pode ser observado na Figura 13.

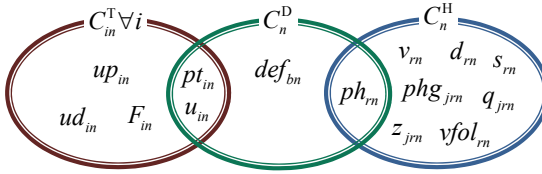


Figura 14: Conjunto de restrições para a SpcDecl1.

Na Figura 14 a variável de potência gerada das hidrelétricas é compartilhada entre os conjuntos C_n^H e C_n^D . Por sua vez, as variáveis que representam a geração das termelétricas acoplam espacialmente o conjunto de restrições de cada uma das usinas C_{in}^T com o conjunto C_n^D . O objetivo nesta estratégia é eliminar esses acoplamentos, a fim de resolver cada subproblema associado aos conjuntos mostrados na Figura 14 separadamente. Como descrito anteriormente, uma das alternativas seria relaxar as restrições que acoplam os conjuntos e então resolver o problema através de um processo iterativo. Esse é o princípio da RL clássica. Entretanto neste trabalho utiliza-se como principal técnica a duplicação de variáveis, a qual consiste em duplicar variáveis específicas do problema. Na literatura (DINIZ; SAGASTIZABAL; MACEIRA, 2007; NILSSON; SJELVGREN, 1997) essa estratégia é conhecida como Relaxação Lagrangiana com Duplicação de Variáveis (RLDV). A RLDV possui algumas vantagens sobre a RL clássica, como por exemplo, permite que um conjunto de restrições do problema original faça parte de

cada subproblema, evitando ter que escolher um conjunto, ou mais, de restrições para relaxar. Alguns resultados teóricos (GUIGNARD; KIM, 1987a) indicam que o limite inferior da RLDV é de melhor qualidade do que aqueles obtidos pela RL clássica, porém, em geral, seu problema dual é maior e aumenta-se o número de variáveis do problema. Neste trabalho utilizam-se as duas metodologias, dependendo do tipo de acoplamento que deseja-se relaxar.

Para a decomposição SpcDec1 aplica-se somente a RLDV, assim um novo conjunto de restrições é introduzido ao problema original, garantindo que as variáveis artificiais criadas sejam idênticas às variáveis originais, conforme:

$$\begin{aligned} pta_{in} &= pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}, & \forall n, i \\ pha_{rn} &= ph_{rn}, & \forall n, r \end{aligned} \quad (60)$$

em que:

pta_{in} é a variável auxiliar que representa a potência gerada pela termelétrica i e nó n (MW);

pha_{rn} é a variável auxiliar que representa a potência gerada pela usina do reservatório r e nó n (MW).

As variáveis originais ou a expressão de variáveis originais, no caso da geração das termelétricas, são substituídas estrategicamente por suas cópias em algumas restrições, tornando possível a decomposição. Consequentemente, o ED implícito pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min f_{ED} = & \sum_{n=1}^N p_n \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \\ & \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} C_n^H & \left(ph_{rn}, v_{rn}, d_{rn}, s_{rn}, phg_{jrn}, q_{jrn}, z_{jrn}, vfol_{rn} \right), & \forall n \\ C_{in}^T & \left(pt_{in}, u_{in}, up_{in}, ud_{in}, F_{in} \right), & \forall n, i \\ C_n^D & \left(pta_{in}, pha_{rn}, def_{bn} \right), & \forall n \\ pta_{in} &= pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}, & \forall n, i \\ pha_{rn} &= ph_{rn}, & \forall n, r \end{aligned} \quad (62)$$

Desta forma, as únicas equações que acoplam os conjuntos previamente definidos são as restrições adicionadas artificialmente (62). Assim, elas são relaxadas e transferidas para a função objetivo do problema dual.

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{SpDec1}}(\lambda \mathbf{pt}, \lambda \mathbf{ph}) = & \min f_{\text{EDI}}(up_{in}, F_{in}, def_{bn}, vfol_{rn}) + \\ & \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^I \lambda pt_{in} \cdot (pta_{in} - pt_{in} - u_{in} \cdot pt_i^{\min}) + \right. \\ & \left. \sum_{r=1}^R \lambda ph_{rn} \cdot (pha_{rn} - ph_{rn}) \right) \end{aligned} \quad (63)$$

em que:

$\lambda \mathbf{pt}$ é o vetor de variáveis duais λpt_{in} , para todo i e nó n ;

$\lambda \mathbf{ph}$ é o vetor de variáveis duais λph_{rn} , para todo r e nó n .

Na função dual Φ^{SpDec1} , λpt_{in} e λph_{rn} são os multiplicadores de Lagrange associados as restrições artificiais do problema (62). Esta função dual pode ser avaliada por meio de vários $(1+I+N)$ subproblemas independentes:

$$\Phi^{\text{SpDec1}} = \Phi^H + \sum_{i=1}^I \Phi_i^T + \sum_{n=1}^N \Phi_n^D \quad (64)$$

Esses subproblemas dividem-se em três conjuntos, com estruturas distintas, de acordo com os componentes do sistema e os conjuntos de restrições citados anteriormente (ilustrados na Figura 14). Note que o conjunto de restrições que representa o atendimento à demanda e a rede de transmissão resulta em um subproblema para cada nó da árvore de cenários, pois com a decomposição espacial tem-se também a separação de suas restrições nos períodos de tempo.

O primeiro subproblema é referente a modelagem das hidrelétricas, dado pela seguinte formulação:

$$\Phi^H = \min \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) - \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^R \lambda ph_{rn} \cdot ph_{rn} \quad (65)$$

sujeito a:

$$v_{rn} - v_{rn-1} + 0,0036 \cdot \left[d_{rn} - \sum_{r^+ \in \mathfrak{N}_r^+} d_{r^+n_{-r}} \right] = 0,0036 \cdot y_{rn}, \quad \forall n, r \quad (66)$$

$$v_r^{\min} \leq v_{rn} \leq v_r^{\max}, \quad \forall n, r \quad (67)$$

$$v_{rn} + vfol_{rn} \geq v_r^{\text{meta}} \quad \forall n \in N_L, r \quad (68)$$

$$vfol_{rn} \geq 0, \quad \forall n \in N_L, r \quad (69)$$

$$phg_{jrn} \leq fphg_{jrn}^{ch} (v_{rn}, q_{jrn}, d_{rn}, s_{rn}) + (1 - z_{jrn}) \cdot phg_{jr}^{\max}, \quad (70)$$

$$ch \in CH_{jr}, \forall n, r$$

$$d_{rn} = s_{rn} + \sum_{j=1}^{J_r} q_{jrn}, \quad \forall n, r \quad (71)$$

$$ph_{rn} = \sum_{j=1}^{J_r} phg_{jrn}, \quad \forall n, r \quad (72)$$

$$phg_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq phg_{jrn} \leq phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \quad (73)$$

$$q_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq q_{jrn} \leq q_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \quad (74)$$

$$s_{rn} \leq s_r^{\max}, \quad \forall n, r \quad (75)$$

$$z_{jrn} \in \{0, 1\}, \quad \forall n, j, r \quad (76)$$

$$\sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) \geq Res_n, \quad \forall n. \quad (77)$$

O subproblema Φ^H é um problema de PLIM estocástico composto por todas as hidrelétricas do sistema, cujo tamanho depende do número de usinas hidrelétricas e do número de nós da árvore de cenários.

As particularidades da operação das termelétricas, bem como os seus custos de operação, são representados pelo seguinte subproblema:

$$\Phi_i^T = \min \sum_{n=1}^N \left(p_n \cdot (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) - \lambda pt_{in} \cdot (pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}) \right) \quad (78)$$

sujeito a:

$$F_{in} \geq \alpha_i^{0,cf} \cdot (pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}) + \alpha_i^{1,cf} \cdot u_{in}, \quad cf \in CF_i, \forall n$$

$$u_{in} - u_{in-1} = up_{in} - ud_{in}, \quad \forall n$$

$$\sum_{na=\max(1, n_{-i}^{up})}^n up_{i,na} \leq u_{in}, \quad \forall n$$

$$\sum_{na=\max(1, n_{-i}^{down})}^n ud_{i,na} \leq 1 - u_{in}, \quad \forall n$$

$$pt_{in} - pt_{in-1} \leq \Delta_i^{up}, \quad \forall n$$

$$-pt_{in} + pt_{in-1} \leq \Delta_i^{down}, \quad \forall n$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq pt_{in} \leq pt_i^{\max} - pt_i^{\min}, & \forall n \\
pt_{in} &\leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in}), & \forall n, t_i^{up} = 0, \\
pt_{in} &\leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - ud_{in+1}), & \forall n, t_i^{up} = 0, \\
pt_{in} &\leq (pt_i^{\max} - pt_i^{\min}) \cdot (u_{in} - up_{in} - ud_{in+1}), & \forall n, t_i^{up} \geq 1, \\
u_{in}, up_{in}, ud_{in} &\in \{0, 1\}, & \forall n.
\end{aligned}$$

A operação das termelétricas é acoplada no tempo, assim o subproblema Φ_i^T é um problema de otimização estocástica, linear com variáveis contínuas e binárias. Portanto tem-se um PLIM para cada usina termelétrica, cujo tamanho depende no número de nós da árvore de cenários.

O último conjunto de subproblemas é composto pelas demais restrições do sistema, tais como requisitos de demanda e limites de transmissão, sendo representado pelo seguinte problema de otimização:

$$\Phi_n^D = \min p_n \cdot C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} + \sum_{i=1}^I \lambda pt_{in} \cdot pta_{in} + \sum_{r=1}^R \lambda ph_{rn} \cdot pha_{rn} \quad (79)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^B \sum_{r \in R_b} pha_{rn} + \sum_{b=1}^B \sum_{i \in I_b} pta_{in} + \sum_{b=1}^B def_{bn} &= \sum_{b=1}^B D_{bn}, \\
-f_l^{\max} &\leq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} pha_{rn} + \sum_{i \in I_b} pta_{in} + def_{bn} - D_{bn} \right), & \forall l \\
f_l^{\max} &\geq \sum_{b=1}^B \Gamma_{lb} \left(\sum_{r \in R_b} pha_{rn} + \sum_{i \in I_b} pta_{in} + def_{bn} - D_{bn} \right), & \forall l.
\end{aligned}$$

Por fim, o subproblema Φ_n^D é um problema de PL para cada nó, cujo tamanho depende principalmente do número de linhas do sistema de transmissão.

4.2.1.2 Decomposição Espacial 2

Nesta segunda variação da decomposição espacial a ideia é atacar o subproblema mais complicado da estratégia anterior. O objetivo é relaxar a restrição da equação (77) para separar o subproblema que representa as hidrelétricas, resultando em um subproblema para cada cascata.

Nesse sentido, modificam-se também os conjuntos de restrições: o conjunto C_n^H é separado em um conjunto para cada cascata

$C_r^{\text{HC}} \forall r \in R^{ca}$, em que ca é o índice da cascata do sistema. O novo conjunto C_r^{HC} não possui a restrição de requisito de reserva girante, sendo composto por (66)-(76). A Figura 15 ilustra os conjuntos de restrições. Note que o conjunto das cascatas é dado para cada ca , ou seja, existem CA (número total de cascatas do sistema) conjuntos (círculos) de restrição para cada nó.

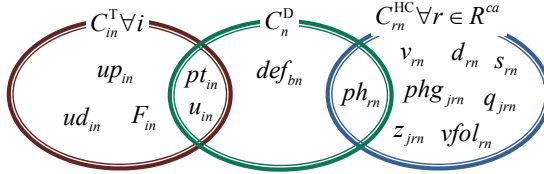


Figura 15: Conjunto de restrições para a SpcDec2.

Para a decomposição SpcDec2 aplica-se a RLDV e a RL clássica, sendo que a duplicação de variáveis é a mesma que em SpcDec1 e relaxa-se a restrição de requisito de reserva girante, resultando no seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{SpcDec2}}(\lambda_{pt}, \lambda_{ph}, \lambda_{res}) = & \min f_{\text{EDI}}(up_{in}, F_{in}, def_{bn}, vfol_{rn}) + \\ & \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^I \lambda_{pt_{in}} \cdot (pta_{in} - pt_{in} - u_{in} \cdot pt_i^{\min}) + \right. \\ & \sum_{r=1}^R \lambda_{ph_{rn}} \cdot (pha_{rn} - ph_{rn}) + \\ & \left. \lambda_{res_n} \cdot \left(\sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jr} - ph_{rn} \right) - Res_n \right) \right) \end{aligned} \quad (80)$$

em que:

λ_{res} é o vetor de variáveis duais λ_{res_n} , para todo nó n .

Na função dual Φ^{SpcDec2} , λ_{res_n} é o multiplicador de Lagrange associado a restrição da equação (77). Esta função dual pode ser avaliada por meio de vários $(CA+I+N)$ subproblemas independentes e um componente constante, conforme:

$$\Phi^{\text{SpcDec2}} = \sum_{ca=1}^{CA} \Phi_{ca}^{\text{HC}} + \sum_{i=1}^I \Phi_i^{\text{T}} + \sum_{n=1}^N \Phi_n^{\text{D}} - \sum_{n=1}^N \lambda_{res_n} \cdot Res_n \quad (81)$$

em que:

ca é o índice da cascata de hidrelétricas do sistema;

CA é o número total de cascatas de hidrelétricas do sistema.

Semelhante à decomposição anterior, esses subproblemas dividem-se em três conjuntos, com estruturas distintas. Os subproblemas que representam as termelétricas e o atendimento à demanda são os mesmos da decomposição SpcDec1. Por sua vez, o subproblema de cada cascata de hidrelétricas é dado por:

$$\Phi_{ca}^{HC} = \min \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^{R^{ca}} vfol_{rn} \right) - \sum_{n=1}^N \left(\sum_{r=1}^{R^{ca}} \lambda p h_{rn} \cdot p h_{rn} - \lambda res_n \cdot \sum_{r=1}^{R^{ca}} \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - p h_{rn} \right) \right) \quad (82)$$

sujeito a:

$$v_{rn} - v_{rn-1} + 0,0036 \cdot \left[d_{rn} - \sum_{r^+ \in \mathfrak{R}_r^+} d_{r^+ n_{-\tau}} \right] = 0,0036 \cdot y_{rn}, \quad \forall n, r \in R^{ca}$$

$$v_r^{\min} \leq v_{rn} \leq v_r^{\max}, \quad \forall n, r \in R^{ca}$$

$$v_{rn} + vfol_{rn} \geq v_r^{meta} \quad \forall n \in N_L, r \in R^{ca}$$

$$vfol_{rn} \geq 0, \quad \forall n \in N_L, r \in R^{ca}$$

$$phg_{jrn} \leq fphg_{jrn}^{ch} (v_{rn}, q_{jrn}, d_{rn}, s_{rn}) + (1 - z_{jrn}) \cdot phg_{jr}^{\max}, \quad ch \in CH_{jr}, \forall n, r \in R^{ca}$$

$$d_{rn} = s_{rn} + \sum_{j=1}^{J_r} q_{jrn}, \quad \forall n, r \in R^{ca}$$

$$ph_{rn} = \sum_{j=1}^{J_r} phg_{jrn}, \quad \forall n, r \in R^{ca}$$

$$phg_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq phg_{jrn} \leq phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \in R^{ca}$$

$$q_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq q_{jrn} \leq q_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall n, j, r \in R^{ca}$$

$$s_{rn} \leq s_r^{\max}, \quad \forall n, r \in R^{ca}$$

$$z_{jrn} \in \{0, 1\}, \quad \forall n, j, r \in R^{ca}$$

em que:

R^{ca} é o conjunto de usinas hidrelétricas pertencentes a cascata ca .

O subproblema Φ_{ca}^{HC} é um problema de PLIM estocástico com acoplamentos temporais e espaciais para cada cascata de usinas

hidrelétricas do sistema, cujo tamanho depende do número de usinas na cascata e de nós da árvore de cenários.

4.2.1.3 Decomposição Espacial 3

Na terceira variação de decomposição espacial, SpcDec3, o objetivo é decompor ainda mais o subproblema das hidrelétricas. Assim, o conjunto de restrições C_n^H da SpcDec1 é separado em dois conjuntos: C_{rn}^{HA} composto pelas restrições (66)-(69), que representa a operação dos reservatórios, e C_{rn}^{HE} composto pelas restrições (70)-(76), que representam a produção de energia. Os demais conjuntos C_{in}^T e C_n^D são os mesmos da SpcDec1 e SpcDec2. Essa divisão dos conjuntos de restrições e o acoplamento entre as variáveis dos grupos são ilustrados na Figura 16. Note que, semelhante a C_{in}^T e C_{rn}^{HA} , o conjunto que representa a produção de energia das hidrelétricas, C_{rn}^{HE} , é dado para cada r , ou seja, existe R conjuntos (círculos) de restrição para cada nó.

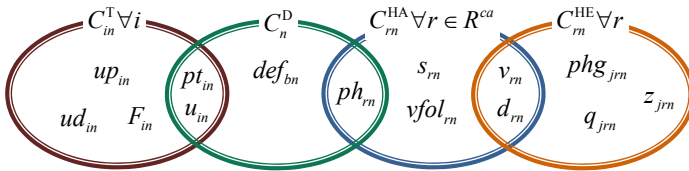


Figura 16: Conjunto de restrições para a SpcDec3.

Para a decomposição SpcDec3 aplica-se a RLDV e a RL clássica, da mesma forma que em SpcDec2. No entanto a duplicação de variáveis é aplicada também para mais dois tipos de variáveis.

$$\begin{aligned} va_{rn} &= v_{rn}, & \forall n, r \\ da_{rn} &= d_{rn}, & \forall n, r \end{aligned} \quad (83)$$

em que:

va_{rn} é a variável auxiliar que representa o volume armazenado na hidrelétrica r e nó n (hm³);

da_{rn} é a variável auxiliar que representa a vazão defluente do reservatório r no nó n (m³/s).

Consequentemente, o ED implícito pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min f_{EDI} = & \sum_{n=1}^N p_n \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \\ & \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
 C_{rn}^{\text{HA}}(va_{rn}, da_{rn}, s_{rn}, vfol_{rn}), & \quad \forall n, r \in R^{ca} \\
 C_{rn}^{\text{HE}}(ph_{rn}, v_{rn}, d_{rn}, s_{rn}, phg_{jrn}, q_{jrn}, z_{jrn}), & \quad \forall n, r \\
 C_{in}^T(pt_{in}, u_{in}, up_{in}, ud_{in}, F_{in}), & \quad \forall n, i \\
 C_n^D(pta_{in}, pha_{rn}, def_{bn}), & \quad \forall n \\
 \sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) \geq Res_n, & \quad \forall n \quad (85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 pta_{in} &= pt_{in} + u_{in} \cdot pt_i^{\min}, & \forall n, i \\
 pha_{rn} &= ph_{rn}, & \forall n, r \\
 va_{rn} &= v_{rn}, & \forall n, r \\
 da_{rn} &= d_{rn}, & \forall n, r
 \end{aligned} \quad (86)$$

Desta forma, as equações que acoplam o problema resultante são as restrições adicionadas artificialmente (86) e o requisito de reserva girante (85). Assim, elas são relaxadas e transferidas para a função objetivo do problema dual.

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\text{SpcDec3}}(\lambda pt, \lambda ph, \lambda res, \lambda v, \lambda d) = \\
 \min f_{\text{EDI}}(up_{in}, F_{in}, def_{bn}, vfol_{rn}) + \\
 \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^I \lambda pt_{in} \cdot (pta_{in} - pt_{in} - u_{in} \cdot pt_i^{\min}) + \right. \\
 \sum_{r=1}^R \left(\lambda ph_{rn} \cdot (pha_{rn} - ph_{rn}) + \lambda v_{rn} \cdot (va_{rn} - v_{rn}) + \right. \\
 \sum_{r=1}^R \lambda d_{rn} \cdot (da_{rn} - d_{rn}) \left. \right) + \\
 \left. \lambda res_n \cdot \left(\sum_{r=1}^R \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) - Res_n \right) \right)
 \end{aligned} \quad (87)$$

em que:

- λv é o vetor de variáveis duais λv_m , para todo r e nó n ;
- λd é o vetor de variáveis duais λd_{rn} , para todo r e nó n .

Na função dual Φ^{SpcDec3} , λv_m e λd_{rn} são os multiplicadores de Lagrange associados as restrições da equação (83). Esta função dual pode ser avaliada por meio de vários $(CA+N \cdot R+I+N)$ subproblemas independentes e uma parcela constante, conforme:

$$\Phi^{\text{SpcDec3}} = \sum_{ca=1}^{CA} \Phi_{ca}^{\text{HA}} + \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^R \Phi_{rn}^{\text{HE}} + \sum_{i=1}^I \Phi_i^{\text{T}} + \sum_{n=1}^N \Phi_n^{\text{D}} - \sum_{n=1}^N \lambda res_n Res_n \quad (88)$$

Esses subproblemas dividem-se em quatro conjuntos, com estruturas distintas. Os subproblemas que representam as termelétricas e o atendimento à demanda são os mesmos da decomposição SpcDec1.

Por sua vez, o subproblema referente a modelagem hidráulica das hidrelétricas, que representa a operação dos reservatórios, é dado pela seguinte formulação.

$$\Phi_{ca}^{\text{HA}} = \min \sum_{n \in N_L} p_n \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^{R^{ca}} vfol_{rn} \right) + \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^{R^{ca}} (\lambda va_{rn} \cdot va_{rn} + \lambda da_{rn} \cdot da_{rn}) \quad (89)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} va_{rn} - va_{rn-1} + 0,0036 \cdot \left[da_{rn} - \sum_{r^+ \in \mathcal{R}_r^+} da_{r^+n-\tau} \right] &= 0,0036 \cdot y_{rn}, \\ &\forall n, r \in R^{ca} \\ v_r^{\min} \leq va_{rn} \leq v_r^{\max}, &\forall n, r \in R^{ca} \\ va_{rn} + vfol_{rn} \geq v_r^{\text{meta}} &\forall n \in N_L, r \in R^{ca} \\ vfol_{rn} \geq 0, &\forall n \in N_L, r \in R^{ca} \end{aligned}$$

O subproblema Φ_{ca}^{HA} é um problema de PL estocástico para hidrelétricas de uma mesma cascata, cujo tamanho depende da quantidade de usinas na cascata e de nós das árvore de cenários.

Por fim, o subproblema referente à geração de energia nas usinas hidrelétricas é dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_{rn}^{\text{HE}} = \min & - (\lambda ph_{rn} \cdot ph_{rn} + \lambda v_{rn} \cdot v_{rn} + \lambda d_{rn} \cdot d_{rn}) + \\ & \lambda res_n \cdot \left(\sum_{j=1}^{J_r} phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn} - ph_{rn} \right) \end{aligned} \quad (90)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} phg_{jrn} &\leq fphg_{jrn}^{ch} (v_{rn}, q_{jrn}, d_{rn}, s_{rn}) + (1 - z_{jrn}) \cdot phg_{jr}^{\max}, \quad ch \in CH_{jr} \\ d_{rn} &= s_{rn} + \sum_{j=1}^{J_r} q_{jrn}, \end{aligned}$$

$$ph_m = \sum_{j=1}^{J_r} phg_{jrn},$$

$$phg_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq phg_{jrn} \leq phg_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall j$$

$$q_{jr}^{\min} \cdot z_{jrn} \leq q_{jrn} \leq q_{jr}^{\max} \cdot z_{jrn}, \quad \forall j$$

$$s_{rn} \leq s_r^{\max},$$

$$z_{jrn} \in \{0,1\}, \quad \forall j$$

O subproblema Φ_{rn}^{HE} é um problema de PLIM com acoplamento entre os grupos de unidades de uma usina, definido para cada hidrelétrica e nó da árvore de cenários.

4.2.2 Decomposição por Cenários

Nesta decomposição os passos são semelhantes aos apresentados anteriormente, sendo que o ED utilizado e a maneira com que o problema é separado são diferentes. Nesse caso, utiliza-se a abordagem por cenários e o problema do ED explícito é dividido em subproblemas referentes a cada cenário da árvore original.

De maneira semelhante à seção anterior, as restrições do problema são separadas e agrupadas em conjuntos, criando-se um conjunto de restrições para cada cenário. Nesse sentido, define-se o conjunto C_{ω}^C , composto pelas restrições das equações (34)-(57) para todo $n \in N(\omega)$. Esse conjunto engloba a representação matemática da operação das hidrelétricas, termelétricas e demais componentes do sistema para um determinado cenário ω da árvore. Abaixo, ilustra-se o acoplamento entre os conjuntos de restrições para o caso de um problema com dois cenários da Figura 12.

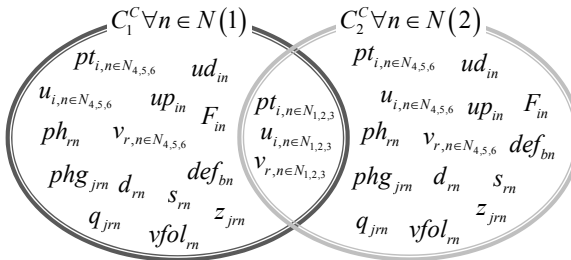


Figura 17: Conjunto de restrições para a ScnDec.

Conforme comentado na Seção 3.3, todas as variáveis de primeiro estágio acoplam os cenários e consequentemente os conjuntos de

restrições que representam cada cenário. No entanto, considera-se nesse trabalho como restrições de não-antecipatividade somente alguns tipos de variáveis (geração das termelétricas e o volume armazenado das hidrelétricas)¹¹. Portanto, são justamente essas variáveis que acoplam os conjuntos de restrições entre os cenários, visto na Figura 17. A formulação do ED segue os conceitos apresentados no Capítulo 3, com as restrições de não antecipatividade escritas explicitamente:

$$\min f_{\text{EDE}} = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \left(\sum_{n \in N(\omega)} p_{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \sum_{n \in N(\omega) \cap N_L} p_{\omega} \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) \right) \quad (91)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} C_{\omega}^C \left(pt_{in}, u_{in}, up_{in}, ud_{in}, F_{rn}, ph_{rn}, v_{rn}, d_{rn}, s_{rn}, \right. \\ \left. phg_{jrn}, q_{jrn}, z_{jrn}, def_{bn}, vfol_{rn} \right), \quad \forall i, r, b, n \in N(\omega) \\ \omega = 1, \dots, \Omega \\ pt_{in} = \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot pt_{i, m \in N_t \cap N(\sigma)}, \quad \forall i, n \in N_t \cap N(\omega) \\ t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \\ u_{in} = \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot u_{i, m \in N_t \cap N(\sigma)}, \quad \forall i, n \in N_t \cap N(\omega) \\ t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \\ v_{rn} = \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot v_{r, m \in N_t \cap N(\sigma)}, \quad \forall r, n \in N_t \cap N(\omega) \\ t = 1, \dots, T_1, \omega = 1, \dots, \Omega - 1 \end{aligned} \quad (92)$$

De maneira semelhante à estratégia apresentada anteriormente, o objetivo na Decomposição por Cenários é eliminar os acoplamentos dados pelas equações (92), a fim de resolver cada subproblema separadamente. Note que a utilização das restrições de não antecipatividade é semelhante à técnica de duplicação de variáveis

¹¹ Note que essa escolha evita que tenham-se soluções diferentes de primeiro estágio para cenários diferentes. Se ao invés do volume armazenado fosse utilizada a variável de geração das hidrelétricas isso não seria garantido, pois usinas hidrelétricas podem ter grupos de unidades diferentes que podem gerar a mesma potência com uma quantidade de água diferente.

utilizada na Decomposição Espacial; porém, neste caso trata-se de uma replicação, pois criam-se múltiplas cópias de uma determinada variável. Assim, para separar o problema para cada cenário as restrições em (92) são relaxadas, tendo-se a seguinte função dual:

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\text{SpeDec3}}(\gamma \mathbf{pt}, \gamma \mathbf{u}, \gamma \mathbf{v}) = & \\
 & \min f_{\text{EDE}}(up_{in}, F_{in}, def_{bn}, vfol_{rn}) + \\
 & \sum_{\omega=1}^{\Omega} \left(\sum_{n \in N(\omega)} \left(\sum_{i=1}^I \left(\gamma pt_{in} \cdot \left(pt_{in} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot pt_{i,m \in N_i \cap N(\sigma)} \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \gamma u_{in} \cdot \left(u_{in} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot u_{i,m \in N_i \cap N(\sigma)} \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. \sum_{r=1}^R \gamma v_{rn} \cdot \left(v_{rn} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot v_{r,m \in N_r \cap N(\sigma)} \right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{93}$$

em que:

- $\gamma \mathbf{pt}$ é o vetor de variáveis duais γpt_{in} , para todo i e nó n ;
- $\gamma \mathbf{u}$ é o vetor de variáveis duais γu_{in} , para todo i e nó n ;
- $\gamma \mathbf{v}$ é o vetor de variáveis duais γv_{rn} , para todo r e nó n .

Na função dual Φ^{ScnDec} , γpt_{in} , γu_{in} e γv_{rn} são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições (59). O seu valor pode ser calculado por meio de vários (Ω) subproblemas independentes:

$$\Phi^{\text{ScnDec}} = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \Phi_{\omega}^{\text{C}} \tag{94}$$

Todos esses subproblemas têm a mesma estrutura, cada um representando a operação de um cenário. Assim, o problema de otimização para um cenário ω específico é dado por:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\omega}^C = \min \sum_{n \in N(\omega)} p_{\omega} \cdot & \left(\sum_{i=1}^I (F_{in} + f_i^3 \cdot up_{in}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{bn} \right) + \\
& \sum_{n \in N(\omega) \cap N_L} p_{\omega} \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{rn} \right) + \\
& \sum_{n \in N(\omega)} \left(\sum_{i=1}^I \left(\gamma pt_{in} \cdot \left(pt_{in} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot pt_{i,m \in N_i \cap N(\sigma)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \gamma u_{in} \cdot \left(u_{in} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot u_{i,m \in N_i \cap N(\sigma)} \right) \right) \right) + \\
& \sum_{r=1}^R \gamma v_{rn} \cdot \left(v_{rn} - \sum_{\sigma=1}^{\Omega} p_{\sigma} \cdot v_{r,m \in N_r \cap N(\sigma)} \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{95}$$

sujeito a:

$$(34)-(57) \quad \forall n \in N(\omega)$$

O subproblema Φ_{ω}^C é um problema de PLIM com acoplamento espacial e temporal; definido para cada cenário da árvore.

4.2.3 Algoritmo de solução da RL

Nesta seção é apresentado o algoritmo de solução utilizado na resolução da RL. Inicialmente, descreve-se o processo iterativo como um todo e em seguida detalham-se os métodos de solução utilizados em cada etapa do algoritmo: problema mestre e subproblemas. Para padronizar os termos utilizados neste trabalho, estabelece-se que resultado é um conjunto de valores das variáveis ou o ponto gerado por algum método de solução, podendo ser um resultado viável, inviável ou ótimo (neste caso também chamado de solução). Por exemplo, o algoritmo de Feixes gera resultados primais inviáveis e soluções duais (resultados duais ótimos) ao final de seu processo iterativo. Existem também resultados primais viáveis que não são ótimos.

Para todas as estratégias de decomposição o algoritmo de solução é ilustrado pela Figura 18.

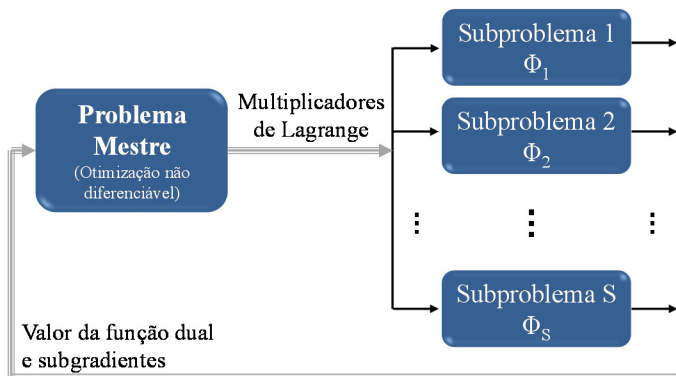


Figura 18: Algoritmo da RL.

De maneira geral, inicialmente, os subproblemas são resolvidos para uma condição inicial (multiplicadores de Lagrange iniciais) e os resultados primais dos subproblemas são usados para enviar ao problema mestre o valor da função dual e um vetor de subgradientes. Este, por sua vez, atualiza os multiplicadores através de alguma técnica e então fornece os valores atualizados para os subproblemas. Com esses novos valores dos multiplicadores, os subproblemas são novamente resolvidos e assim segue-se o processo iterativo até a convergência.

Conforme ilustrado na Figura 18, o processo iterativo da RL é dividido em dois níveis de resolução, em que no primeiro nível resolve-se o problema mestre e no segundo os subproblemas. Essas duas etapas são descritas a seguir.

No segundo nível, para cada decomposição, existem vários subproblemas a serem resolvidos. Esses subproblemas são divididos em conjuntos com características matemáticas diferentes, devido ao tipo de variáveis que os compõem, podendo ser de natureza binária e/ou contínua. Nesse sentido, eles são resolvidos por pacotes de otimização específicos, tais como *solvers* de PL e de PLIM.

A Tabela 2 resume as características dos problemas resolvidos na RL, com a quantidade de subproblemas de cada natureza e o número de variáveis duais para cada decomposição.

Tabela 2: Característica dos problemas da RL.

Decomposição	Número de variáveis duais	Número de problemas de PL	PLIM
SpcDec1	$N \cdot (I + R)$	N	$1 + I$
SpcDec2	$N \cdot (I + R + 1)$	N	$CA + I$
SpcDec3	$N \cdot (I + 1 + 3 \cdot R)$	$N + CA$	$N \cdot R + I$
ScnDec	$T_1 \cdot \Omega \cdot (2 \cdot I + R)$	0	Ω

A título de comparação considera-se um dos casos mencionados na Tabela 1, Seção 3.3, cuja configuração hidrotérmica é extraída do SIN, com 412 unidades termelétricas, 164 usinas hidrelétricas, 4.853 barras e 6.616 linhas de transmissão. Considerando um horizonte de estudo de 48 horas e uma árvore com 10 cenários, o ED implícito é um problema de PLIM com mais de 2 milhões de variáveis e de 6 milhões de restrições. Por outro lado, nas decomposições o número de variáveis e restrições em cada subproblema é menor; no entanto, tem-se todo um processo iterativo a ser resolvido. A dimensão dos problemas referentes às estratégias de decomposição é apresentada na Tabela 3.

Tabela 3: Problemas nas decomposições para um sistema de grande porte.

SpcDec1: 152.064 variáveis duais			
Subproblemas		Variáveis	Restrições
1	PLIM	335.600	774.896
412	PLIM	1.320	4.488
264	PL	5.159	13.233
SpcDec2: 152.328 variáveis duais			
Subproblemas		Variáveis	Restrições
36	PLIM	9.322*	21.518*
412	PLIM	1.320	4.488
264	PL	5.159	13.233
SpcDec3: 238.920 variáveis duais			
Subproblemas		Variáveis	Restrições
43.296	PLIM	8**	17**
36	PL	3.654*	1.248*
412	PLIM	1.320	4.488
264	PL	5.159	13.233
ScnDec: 213.408 variáveis duais			
Subproblemas		Variáveis	Restrições
10	PLIM	379.748	1.112.132

*Valor médio, pois o valor depende do número de usinas em cada cascata;
**Valor médio, pois o valor depende do número de grupos de unidades em cada hidrelétrica.

Conforme pode-se observar na Tabela 3, a quantidade de subproblemas a serem resolvidos, a cada iteração do método de Feixes, na decomposição por cenários é menor do que nas estratégias de decomposição espacial. Por outro lado, o tamanho, e provavelmente a dificuldade de solução, de cada um dos subproblemas é maior.

No primeiro nível do algoritmo da RL, Figura 18, ocorre a atualização dos multiplicadores de Lagrange, que não é uma tarefa trivial, visto que, em geral, o problema dual é não diferenciável e de grande porte. Assim, critérios de parada e ajustes utilizados para funções diferenciáveis não podem ser aplicados. Para isso, neste trabalho, utiliza-se o método dos Feixes (LEMARÉCHAL *et al.*, 1995; FRANGIONI, 2002). A principal vantagem desta técnica em relação aos outros métodos de otimização não diferenciável é a existência de um critério de parada não associado diretamente ao subgradiente da função dual e a estabilidade do processo iterativo (BONNANS *et al.*, 2006).

Neste trabalho utiliza-se o algoritmo de Feixes desenvolvido por Frangioni (2002), considerando o modelo desagregado, conforme descrito na sequência.

O método de Feixes (agregado) gera novos valores dos multiplicadores de Lagrange, λ^{12} , através da resolução do problema (96).

$$\max_{\theta^k, \lambda^k} \theta^k - \frac{1}{2 \cdot \rho^k} \|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 \quad (96)$$

sujeito a:

$$\theta^k \leq \sigma^{kk} + g(\lambda^{kk}) \cdot (\lambda^k - \bar{\lambda}), \quad \forall kk \in \beta$$

em que:

- θ^k é a aproximação do valor da função dual;
- k é o índice de iterações do método de Feixes (algoritmo da RL);
- ρ^k é um parâmetro de penalidade positivo que define a região de confiança do problema;
- λ^k é o vetor de variáveis duais da iteração k ;
- $\|\cdot\|^2$ é a norma 2, dada pela soma do quadrado do valor dos elementos do vetor;

¹² Por simplificação, o vetor de variáveis λ representa todos multiplicadores de Lagrange do problema, para qualquer uma das decomposições apresentadas.

- $\bar{\lambda}$ é o centro de estabilidade do método, em geral, os valores de multiplicadores que fornecem o maior valor da função dual;
- σ^{kk} é o erro de linearização, dado por $\sigma^{kk} = \Phi(\lambda^{kk}) + g(\lambda^{kk}) \cdot (\bar{\lambda} - \lambda^{kk}) - \Phi(\bar{\lambda})$;
- $g(\cdot)$ é o vetor de subgradientes;
- β é o conjunto de feixes, ou seja, os cortes já adicionados.

Basicamente, a cada iteração do algoritmo da RL, Figura 18, compara-se o aumento de θ^k com o incremento $\Delta\Phi^k = \Phi(\lambda^k) - \Phi(\bar{\lambda})$. Se um incremento significativo é obtido, o centro de estabilidade é deslocado para λ^k e o parâmetro ρ^k é atualizado. Adicionalmente, se σ^k é “pequeno”, então o subgradiente g é adicionado ao modelo. Caso contrário, o valor de θ^k não é considerado preciso o suficiente e ρ^k é decrementado.

Para o problema resolvido neste trabalho a função dual $\Phi(\lambda^k)$ possui uma estrutura desagregada, conforme equações (64), (81), (88) e (94). Nesse sentido aplica-se o método de Feixes desagregado, em que o problema dual é resolvido por (97), cuja função objetivo é a soma de vários componentes; neste caso, cada componente do modelo dual é referente a um subproblema apresentado na descrição das decomposições.

$$\max_{\theta_{cmp}^k, \lambda^k} \sum_{cmp=1}^{CMP} \theta_{cmp}^k - \frac{1}{2 \cdot \rho^k} \|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 + \lambda^k \cdot G \quad (97)$$

sujeito a:

$$\theta_{cmp}^k \leq \sigma_{cmp}^{kk} + g_{cmp}(\lambda^{kk}) \cdot (\lambda^k - \bar{\lambda}) \quad \forall kk \in \beta, cmp = 1, \dots, CMP$$

em que:

CMP é o número total de componentes do modelo dual;

G é uma constante, corresponde à componente linear da função dual.

Dessa forma, note que também existe um vetor de subgradientes para cada componente. Para a SpcDec1, por exemplo, a função dual é composta por $(1+I+N)$ componentes. Neste trabalho a quantidade de componentes utilizados é a mesma que de subproblemas. Contudo, isso não é uma regra, podendo-se ter uma desagregação parcial da função dual ou até mesmo usar o modelo agregado com vários subproblemas. A comparação do equacionamento dos modelos agregado e desagregado é feita por Bacaud *et al.* (2001). Em resumo, o modelo desagregado é maior, contém mais restrições, e portanto exige um gerenciamento (compressão e/ou eliminação) mais eficiente dos cortes; por outro lado, a soma de

várias (*SUB*) componentes é uma descrição melhor da função dual, comparado com o uso de somente uma componente, como é o modelo agregado. Portanto, o modelo desagregado é conveniente nos casos em que o incremento no tempo de processamento de cada iteração é compensado por uma redução significativa no número de iterações necessárias para a convergência (BORGHETTI *et al.*, 2003).

Além disso, neste trabalho utilize-se uma linearização por partes no termo quadrático de (97), permitido por meio do algoritmo de Feixes de Frangioni (2002), tornado o problema dual linear, ao invés de um problema quadrático. Conforme demonstrado por Frangioni e Gorgone (2011) essa aproximação pode trazer benefícios à resolução do problema.

O algoritmo do método de Feixes desagregado é a mesma que a estrutura do modelo agregado, descritos em Frangioni (2002). Adicionalmente, o critério de parada usado nesse trabalho, definido em Bonnans *et al.* (2006), é dado pela seguinte equação:

$$\frac{\max(\sigma, \rho \cdot \|sg\|)}{\Phi + 1} \leq tol \quad (98)$$

em que:

sg é o sigma-subgradiente, obtido com os valores da solução convexificada¹³ do problema;
 $\| \cdot \|$ é a norma 1, isto é, a soma módulo dos elementos do vetor;
tol é a tolerância desejada, em valores relativos.

Em geral o valor de *tol* utilizado varia entre $1 \cdot 10^{-6}$ e $1 \cdot 10^{-5}$, pois ela é determinada com base no número de restrições relaxadas em cada estratégia (usadas para calcular *sg*).

Por fim, o modelo desagregado permite usar uma técnica apresentada por Frangioni e Gorgone (2014), que consiste em agregar os subproblemas convexos ao problema dual. Isso permite usar modelos exatos para essas componentes, considerando suas restrições na formulação do problema mestre, ao invés de aproximar iterativamente seus valores por cortes (linearizações). Assim, os subproblemas contínuos e lineares são representados por componentes chamadas de componentes simples (definida no artigo de Frangioni e Gorgone (2014) como *easy components*). Para as estratégias apresentadas anteriormente, os

¹³ Solução convexificada é a combinação linear das soluções de cada iteração dos subproblemas. Ela é abordada com mais detalhes, na seção 4.3.

subproblemas simples são as componentes relativas aos subproblemas $\Phi_n^D \forall n$ e $\Phi_{ca}^{HA} \forall ca$.

Portanto essa funcionalidade pode ser utilizada nas estratégias SpcDec1, SpcDec2 e SpcDec3. Neste caso, no algoritmo de solução da RL da Figura 18 deve-se incluir alguns subproblemas no modelo do problema mestre, sendo estes resolvidos de maneira exata, como ilustrado na Figura 19. A desvantagem dessa técnica é que aumenta-se consideravelmente a dimensão do problema dual, e isso pode ser muito oneroso computacionalmente.

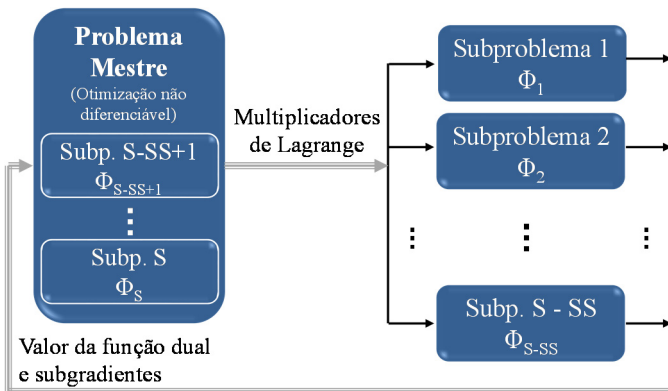


Figura 19: Uso de componentes simples na resolução do problema dual.

4.3 RECUPERAÇÃO PRIMAL

Devido à não convexidade do problema da PDE, causada principalmente pela presença de variáveis binárias, a aplicação da RL não gera um resultado primal viável, assim torna-se necessária a aplicação de outra metodologia para encontrar um resultado primal aceitável (de baixo custo e viável) para a PDE. Nesse sentido, neste trabalho propõe-se uma estratégia que faz uso das soluções individuais dos subproblemas da RL e dos princípios dos métodos da decomposição primal, mais especificamente do método de Benders. Os detalhes da estratégia aplicada na RP são descritos nas seções a seguir.

4.3.1 Heurística

A aplicação da RL não gera um resultado primal viável; no entanto, resulta em uma solução dual e um limite inferior para o valor ótimo da função objetivo do problema primal. Além disso, uma importante

propriedade da RL em problemas não convexos é que, apesar de não resolver o problema original, resolve-se de fato uma versão convexificada dele (FELTENMARK; KIWIEL, 1998; FRANGIONI, 2005; LEMARÉCHAL, 2001). Na prática, para problemas lineares, isso tipicamente corresponde à um resultado que é viável para todas as restrições exceto para as restrições de integralidade. Ou seja, ao invés de obter decisões inteiras (valores iguais a 0 ou 1) para o estados das unidades e demais variáveis binárias, tem-se como resultado valores entre 0 e 1 que atendem todas as demais restrições do problema. Esse resultado é chamado de *pseudo-schedule* em inglês e definido neste trabalho como pseudo resultado.

Uma das utilidades do pseudo resultado é, por exemplo, ser interpretado heurísticamente como a probabilidade da unidade estar ligada, sendo assim usada como guia para alguma metodologia de RP. Adicionalmente, podem-se modificar apropriadamente a função objetivo do problema (DUBOST; GONZALEZ; LEMARÉCHAL, 2005; DANIILIDIS; LEMARÉCHAL, 2005), ou ainda ser usada em uma heurística de busca que utiliza o pseudo resultado e a solução inteira produzida em cada subproblema da RL (FRANGIONI; GENTILE; LACALANDRA, 2008; SAGASTIZÁBAL, 2012).

Para determinar o pseudo resultado, utilizam-se as informações do problema dual (96) e as soluções ativas dos subproblemas das iterações anteriores, de acordo com a equação (99). Por simplificação, definem-se vetores de variáveis para cada nó do problema: o vetor de variáveis xx_n contém todas as variáveis contínuas do nó n (pt e ph por exemplo) e xu_n contém todas as variáveis inteiras do nó n (u e z por exemplo).

$$\begin{aligned}\widetilde{xx}_{e,n} &= \sum_{kk \in \beta} \psi^{kk} \cdot xx_{e,n}^{kk}, & \forall e \in E_c, \\ \widetilde{xu}_{e,n} &= \sum_{kk \in \beta} \psi^{kk} \cdot xu_{e,n}^{kk}, & \forall e \in E_b,\end{aligned}\tag{99}$$

em que:

- $\widetilde{xx}_{e,n}$ é o elemento e do vetor de pseudo valores das variáveis contínuas do nó n ;
- $\widetilde{xu}_{e,n}$ é o elemento e do vetor de pseudo valores das variáveis binárias do nó n ;
- e é o índice de elementos (variáveis) do vetor;
- E_c é o número total de variáveis contínuas que compõe o vetor xx_n ;

E_b	é o número total de variáveis binárias que compõe o vetor xu_n ;
ψ^{kk}	é o multiplicador de Lagrange de cada plano adicionado ao problema dual (ao conjunto de Feixes), ou seja, o multiplicador da restrição kk em (96). Esse multiplicador é igual a zero para os cortes não ativos no problema dual;
$xx_{e,n}^{kk}$	é o elemento e do vetor xx_n na iteração kk da RL;
$xu_{e,n}^{kk}$	é o elemento e do vetor xu_n na iteração kk da RL;
β	é o conjunto de todas iterações executadas do método de Feixes, incluindo os passos sérios e nulos.

Note que o pseudo resultado também pode ser obtido antes da convergência do algoritmo da RL; no entanto, ele vai se alterando durante o processo iterativo, pois a cada iteração uma nova solução dos subproblemas pode ser adicionada à combinação convexa, que resulta no pseudo resultado.

Nesse contexto, a heurística consiste em usar os valores do pseudo resultado e a solução dos subproblemas a cada iteração como valores guias. A ideia básica da estratégia é utilizar termos proximais em conjunto com a função objetivo original para resolver o problema.

Inicialmente divide-se o problema no tempo, em subproblemas referentes à cada nó da árvore de cenários. Da mesma forma que na RL, na RP tem-se também subproblemas, mas nesse caso cada nó é representado por um problema de PLIM.

$$\min f_{no} = p_{no} \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{i,no} + f_i^3 \cdot up_{i,no}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{b,no} \right) \quad (100)$$

sujeito a:

$$(34)-(57) \quad \forall n = no.$$

Sendo que para os nós do final do horizonte o subproblema é:

$$\min f_{no} = p_{no} \cdot \left(\sum_{i=1}^I (F_{i,no} + f_i^3 \cdot up_{i,no}) + C_{def} \cdot \sum_{b=1}^B def_{b,no} \right) + p_{no} \cdot \left(C_{vfol} \cdot \sum_{r=1}^R vfol_{r,no} \right) \quad (101)$$

sujeito a:

$$(34)-(57) \quad \forall n = no \in N_L.$$

Esses subproblemas são resolvidos independentemente, conforme ilustrado na Figura 20 (a linha pontilhada representa o desacoplamento

entre os períodos de tempo), na ordem dos primeiros períodos até os períodos do final de horizonte. A estratégia funciona como uma janela deslizante, usando as soluções dos subproblemas anteriores como dados de entrada para o subproblema atual.

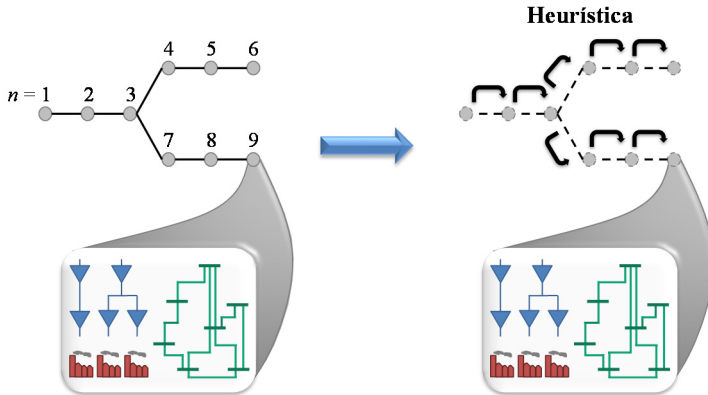


Figura 20: Decomposição dos subproblemas na RP.

Adicionando os termos proximais e ponderando cada parcela, tem-se o seguinte modelo para cada subproblema da RP:

$$\min \quad \mu_1 \cdot \frac{f_{no}}{fd_{no}} + (1 - \mu_1) \cdot (\mu_2 \cdot TP_{pr} + (1 - \mu_2) \cdot TP_{sp}) \quad (102)$$

sujeito a:

(34)-(57) $\forall n = no$,

em que:

μ_1 é o parâmetro de ponderação entre o custo de operação e os termos proximais, sendo um valor entre $[0,1]$;

fd_{no} é um valor usado para normalizar o termo referente ao custo de operação, ou seja, é a função f_{no} avaliada na solução obtida dos subproblemas;

μ_2 é o parâmetro de ponderação entre as variáveis do pseudo resultado e as variáveis da solução dos subproblemas, $[0,1]$;

TP_{pr} é o termo proximal referente ao pseudo resultado, definido em (103);

TP_{sp} é o termo proximal referente à solução dos subproblemas, definido em (103).

$$\begin{aligned}
 TP_{pr} &= \mu_3 \cdot \left\| \frac{xx_{no} - \widetilde{xx}_{no}}{xx^{\max} - xx^{\min}} \right\| + (1 - \mu_3) \cdot \|xu_{no} - \widetilde{xu}_{no}\|, \\
 TP_{sp} &= (1 - \mu_3) \cdot \left\| \frac{xx_{no} - xx_{no}^k}{xx^{\max} - xx^{\min}} \right\| + \mu_3 \cdot \|xu_{no} - xu_{no}^k\|,
 \end{aligned} \tag{103}$$

em que:

- μ_3 é o parâmetro de ponderação entre as variáveis contínuas e binárias, $[0,1]$;
- $\| \cdot \|$ representa a norma 1;
- xx_{no}^k é o vetor de variáveis contínuas com a solução dos subproblemas na iteração k da RL;
- xu_{no}^k é o vetor de variáveis binárias com a solução dos subproblemas na iteração k da RL.

Note que a estratégia pode ser diferente de acordo com a função objetivo definida, dependendo dos parâmetros de ponderação μ escolhidos.

Conforme convencionado anteriormente, xx_n e xu_n , representam, respectivamente, vetores de variáveis contínuas e binárias do nó n . Portanto, em (103) os termos proximais podem ser escritos para todas ou somente algumas variáveis do problema. No caso deste trabalho, utilizam-se termos proximais para as variáveis que representam a geração das termelétricas (pt e u), o volume armazenado (v), a geração dos grupos de unidades hidrelétricas (phg) e o déficit em cada barra do sistema (def).

$$\begin{aligned}
 xx_{no} &= \begin{bmatrix} pt_{1,no}, \dots, pt_{I,no}, v_{1,no}, \dots, v_{R,no}, def_{1,no}, \dots, def_{B,no}, \\ phg_{1,1,no}, \dots, phg_{J_1,1,no}, phg_{1,2,no}, \dots, phg_{J_R,R,no} \end{bmatrix}, \\
 xu_{no} &= [u_{1,no}, \dots, u_{I,no}],
 \end{aligned} \tag{104}$$

Para as variáveis que possuem cópias, devido a estratégia de decomposição usada, por exemplo pt e pta , o valor usado nos termos proximais, em (103), é dado pelo seu valor médio, $(pt + pta)/2$, tanto no pseudo resultado, quanto na solução dos subproblemas.

Em resumo, na RP, o problema original é dividido em vários subproblemas, um para cada nó. A função objetivo de cada subproblema da RP é composta por dois termos: a função objetivo original e os termos proximais. O termo proximal busca reduzir a distância com relação aos resultados já existente em cada iteração da RL (pseudo resultado e

solução dos subproblemas da RL). Os subproblemas da RP são resolvidos do primeiro período até o final do horizonte, gerando um resultado, cujos valores das variáveis binárias são utilizados para resolver o problema original com as decisões binárias fixas, portanto um problema de PL (composto pelas equações (33)-(43), (45)-(53), (55)-(57) e com as variáveis u , up , ud e z determinadas). Isso conclui uma iteração da heurística, ilustrada na Figura 21, que deve ser seguida de uma iteração da RL para que os termos proximais sejam atualizados e a heurística gere, possivelmente, um resultado diferente do anterior.

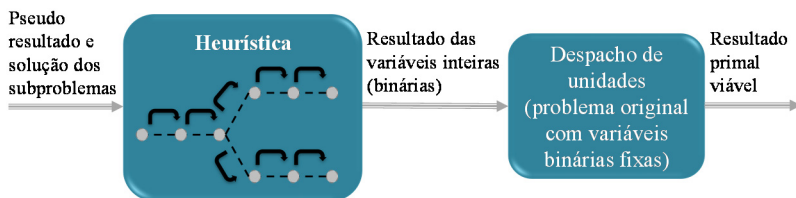


Figura 21: Uma iteração da heurística.

Além disso, ao se encontrar um resultado primal viável, por meio da heurística, o valor de custo esperado de operação encontrado é utilizado no algoritmo de Feixes como parte do modelo dual, como um subgradiente plano (todos valores iguais a zero), definindo um limite superior para o problema dual, que pode ser ilimitado devido ao uso da linearização por partes do termo quadrático em (96)

Conforme descrito, a RP consiste de uma heurística que faz uma única recursão progressiva em seus problemas, a cada iteração da RL, que também é realimentada eventualmente quando encontra-se um resultado primal viável. Essa estratégia pode ainda ser melhorada, adicionando-se uma etapa de recursão regressiva, em que utilizam-se funções de recurso, que são aproximações do custo futuro das decisões feitas em cada subproblema da RP. Os detalhes deste aprimoramento são apresentados na seção a seguir.

4.3.2 Aproximação linear da função de recurso

A ideia principal desta técnica é construir uma função que representa o custo futuro em cada um dos subproblemas da RP. Assim, baseado na metodologia de Benders, procura-se inserir restrições lineares (cortes) nos subproblemas da RP por meio de uma recursão regressiva.

O problema de aplicar a decomposição de Benders diretamente ao problema é que esta metodologia requer problemas convexos para a garantia de convergência. Os subproblemas considerados nesse trabalho são de PLIM, então, em geral, não pode-se esperar que a metodologia resulte na solução ótima. Assim, para construir os cortes considera-se as variáveis binárias como contínuas e resolve-se a recursão regressiva como no método de Benders. O que busca-se é melhorar a maneira de que cada subproblema da RP “enxergue” a consequência das decisões, independentemente se existe ou não garantia de otimalidade, pois, em geral, a qualidade do resultado pode ser medido por meio do limite inferior fornecido pela RL.

A inclusão dessa informação aos subproblemas da RP é feita em termos de aproximações (cortes) lineares que valoram o custo futuro das decisões. O que importa é que os cortes adicionados realizem sua função, isto é, mantenham a decisão do subproblema distante de decisões caras (custo de operação imediato e futuro altos).

Basicamente, o que se faz é construir os cortes, de acordo com a decomposição de Benders na recursão regressiva, considerando os subproblemas como problemas de PL, subproblemas (100) e (101), fixando as variáveis binárias como contínuas, entre 0 e 1. Assim é possível utilizar as variáveis duais, das restrições de acoplamento temporal, para construir os cortes.

Considerando a formulação genérica (1) os subproblemas da RP na recursão regressiva são problemas de PL com a seguinte estrutura.

$$f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = \min p_n \cdot c'_n \cdot x_n + \sum_{m \in N_{+1}(n)} ap_m \quad (105)$$

sujeito a:

$$\mathbf{A}_n^n \cdot x_n \geq b_n - \sum_{t=1}^{T_2-1} \mathbf{A}_{n-t}^n \cdot x_{n-t}, \quad (\varphi_n) \quad (106)$$

$$ap_m \cdot ee + \sum_{t=1}^{T_2-1} \pi_m^t \cdot x_{m-t} \geq \delta_m, \forall m \in N_{+1}(n), \quad (v_{n,m}) \quad (107)$$

em que:

ap_n é a variável que representa a aproximação da função de recurso (custo futuro de operação);

ee é um vetor unitário de tamanho $k \times 1$, em que k é o número de iterações;

φ_n é o vetor de multiplicadores das restrições do nó n ;

- $v_{n,m}$ é o vetor de multiplicadores das aproximações função de recurso referente ao nó m consideradas nó n ;
- π_n^t é o vetor de coeficientes que multiplica as variáveis na aproximação da função de recurso;
- δ_n é o vetor de valores constantes da restrição de aproximação da função de recurso.

Essa formulação é descrita e exemplificada no Apêndice A usando o problema (1) e a árvore de cenários da Figura 20.

Por fim, o tratamento das inviabilidades na decomposição de Benders pode ser feito de duas maneiras: por meio do uso de variáveis de folga e por cortes de inviabilidade. As duas estratégias tem vantagens e desvantagens (C. YUEN, 2006; SANTOS; DINIZ, 2009). De acordo com Santos e Diniz (2009), quando o problema original é viável¹⁴ as duas alternativas demoram aproximadamente o mesmo tempo de processamento. Neste trabalho utilizam-se variáveis de folga nas restrições, permitindo assim resultados viáveis (de alto custo) em casos em que esses seriam inviáveis. Por exemplo, em situações em que há uma grande redução da demanda e não é possível desligar mais usinas, isso geraria uma inviabilidade em determinado subproblema.

4.3.3 Algoritmo de solução da RP

Portanto, a RP passa a ser resolvida em duas etapas: recursão progressiva e regressiva, conforme descrito na Figura 22, cuja a interação entre as duas recursões é ilustrada na Figura 23.

¹⁴ Segundo os autores, o problema original pode ser inviável, pois, ao definir as restrições para a operação do dia seguinte, o ONS não pode garantir *a priori* a viabilidade do problema. Nesse sentido, se o problema original é inviável, as variáveis de folga ajudam a identificar as restrições violadas, guiando ações corretivas para viabilizar o problema.

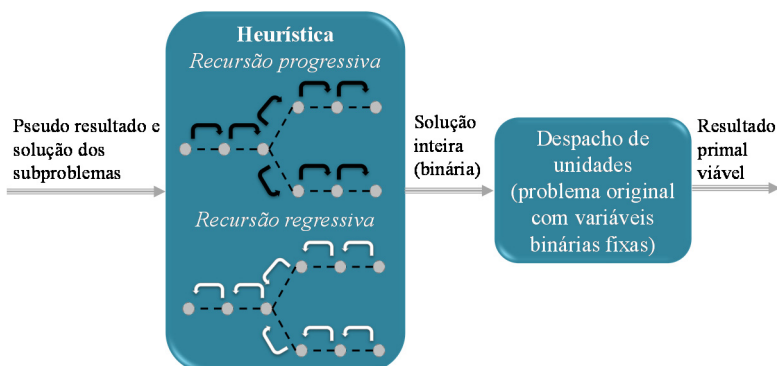


Figura 22: Uma iteração da RP considerando a recursão regressiva.

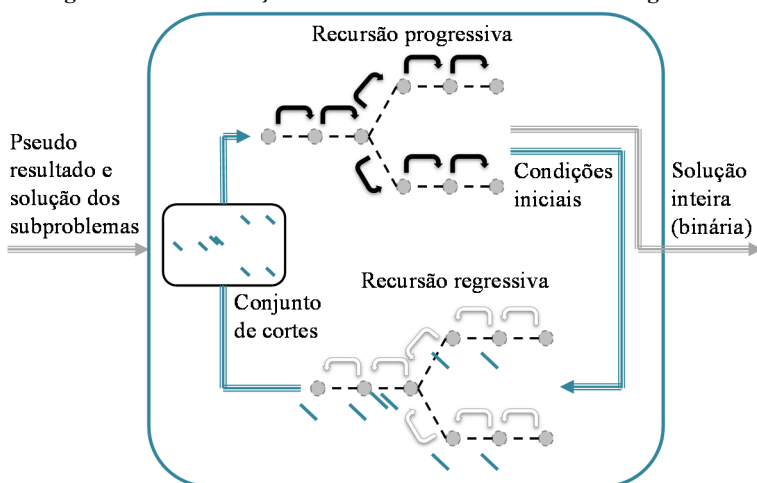


Figura 23: Interação entre as recursões progressiva e regressiva.

Dessa forma, o algoritmo da RP é o seguinte:

1. Recursão progressiva: resolver os subproblemas de PLIM um a um, do início até o final do horizonte, em que a função objetivo é composta pelo custo de operação (original), os termos proximais e o custo futuro de operação. O resultado do subproblema relativo ao nó n é utilizado como dado de entrada para os subproblemas pertencentes ao conjunto $N_{+1}(n)$;
2. Recursão regressiva: resolver os subproblemas de PL, um a um, do final até o início do horizonte com a inclusão de novos cortes, em que a função objetivo é composta pelo custo de operação (original) e o custo futuro de operação;

3. Ao final da recursão regressiva, as aproximações da função de custo futuro, restrições (107), criadas nessa iteração são incluídas também nos subproblemas da recursão progressiva, melhorando assim a aproximação do custo futuro na próxima iteração da RP;
4. Resolve-se o problema original com as decisões binárias fixas, obtidas a partir do resultado da recursão progressiva.

Destaca-se que todos cortes adicionados são mantidos para as iterações seguintes da RP, pois ainda são limites válidos para a solução dos subproblemas. Além disso, tanto na recursão progressiva quanto regressiva os subproblemas de final de horizonte tem somente a parcela do custo de operação.

4.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Nesta última seção apresenta-se o algoritmo de resolução considerando as duas etapas, RL e RP. A Figura 24 ilustra o fluxograma do processo global de otimização da PDE.

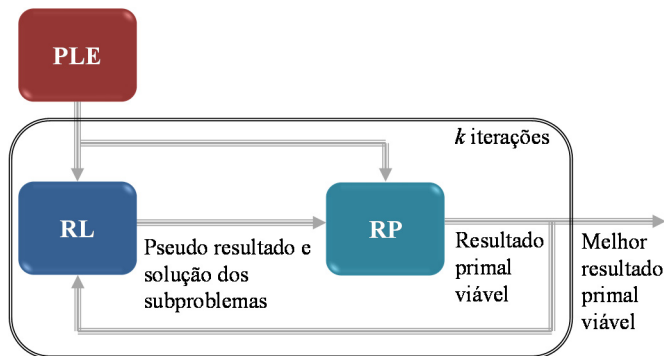


Figura 24: Algoritmo de solução.

Inicialmente antes de resolver cada uma das etapas, resolve-se um problema de PL estendido (PLE), ou seja, com as restrições adicionadas artificialmente ao problema (por exemplo, as equações (60) para a SpcDec1). Assim tem-se valores iniciais para as variáveis duais do problema, que são utilizadas como pontos de partida (chamada de partida quente) para o algoritmo de Feixes na RL. Adicionalmente, a solução primal encontrada pode ser utilizada para criar aproximações de custo futuro, restrições do tipo (107), iniciais para os subproblemas da RP. Isso

é semelhante à resolver uma recursão regressiva, mas neste caso todos os subproblemas são resolvidos de uma única vez.

A partir disso, alterna-se entre a RL e a RP; portanto, uma iteração do método é composto por uma iteração do método de Feixes e uma iteração da heurística usada como RP.

O resultado de menor custo durante todo o processo iterativo é guardado e dado como melhor resultado viável para o problema da PDE. Note que o pseudo resultado gerado na RL só tende a melhorar no decorrer das iterações. Porém, nada pode-se afirmar dos resultados dos subproblemas da RL, assim a RP é rodada após cada iteração da RL. Se por exemplo, o parâmetro μ_2 for igual a 1, não faz sentido rodar a RP a cada iteração, e sim somente no final de todo o processo iterativo.

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados dos experimentos computacionais. Todos os testes foram executados em um computador Intel Xeon CPU X5690 3,47 GHz e 32,0 GB de memória RAM e o pacote de otimização usado para resolver problemas de PL e PLIM foi o Gurobi versão 6.0.5 (GUROBI OPTIMIZATION, 2015).

A apresentação dos experimentos computacionais é dividida em três seções principais. Inicialmente descrevem-se os sistemas teste usados e seus dados de entrada, tais como informações das usinas e linhas de transmissão, condições iniciais e o procedimento de geração dos cenários. Em seguida são abordados os resultados comparativos entre as estratégias de resolução da RL, divididos em duas seções, referentes aos casos determinísticos e aos casos estocásticos. Por fim, apresentam-se os resultados comparativos das estratégias de resolução considerando as etapas da RL e RP. Além disso, comparam-se as soluções do problema com os resultados do pacote de otimização Gurobi (resolvido por meio do Equivalente Determinístico nos casos estocásticos). Nesta última seção apresentam-se ainda os testes realizados com os ajustes da heurística.

5.1 DESCRIÇÃO DOS SISTEMAS TESTE

As estratégias descritas no capítulo anterior são aplicadas em um conjunto de sistemas de teste. Inicialmente são descritos os dados das usinas e da rede de transmissão e, em seguida, são apresentados as diferentes condições iniciais. Por fim, apresentam-se os valores de demanda e afluência incremental, as quais são consideradas como variáveis aleatórias do problema.

Ao todo cinco sistemas elétricos são utilizados como base para os experimentos computacionais, diferenciados entre si pelo número e proporção das fontes de geração, hidrelétricas (H) e termelétricas (T). O número de usinas e a distribuição das capacidades de geração são apresentadas na Tabela 4. Adicionalmente, a última coluna da direita apresenta o valor da capacidade total de armazenamento dos reservatórios.

Tabela 4: Distribuição das fontes de geração nos sistemas de teste.

Sist.	Número de usinas		Capacidade de geração (%)		Capacidade de geração (MW)		Total (MW)	Volume útil total (hm³)
	H	T	H	T	H	T		
A	7	14	25,0	75,0	5.323,5	15.974,0	21.297,5	5.635,1
B	7	14	75,0	25,0	6.914,0	2.310,0	9.224,0	9.309,0
C	10	10	50,0	50,0	8.069,2	8.063,0	16.132,2	10.737,5
D	14	7	76,3	23,7	12.237,5	3.809,0	16.046,5	14.944,1
E	14	7	25,2	74,8	2.441,1	7.230,0	9.671,0	5.507,2

Os sistemas apresentados na Tabela 4 são baseados em algumas informações do sistema brasileiro. A maioria dos dados das usinas hidrelétricas foi obtido por meio da base de dados do programa computacional HydroByte (HYDROBYTE, 2015). Por sua vez, os dados das termelétricas foram obtidos por meio de um programa desenvolvido por Frangioni e alguns colaboradores (FRANGIONI, 2008). O programa gera dados de usinas fictícias, em que as características de cada usina são geradas aleatoriamente com base em parâmetros reais. Os dados do sistema de transmissão foram extraídos do sistema equivalente da região sul do SIN, resultando em um sistema com 46 barras e 95 linhas de transmissão.

Adicionalmente, em todos os experimentos considera-se um horizonte de planejamento de 48 horas, dividido em dois estágios. O primeiro estágio corresponde as primeiras 24 horas (períodos), cujos valores de demanda e afluência são conhecidos. Por outro lado, esses dados são incertos no segundo estágio (25° até o 48° períodos), ou seja, existem diferentes curvas de demanda e valores de afluência incremental para as próximas 24 horas, conforme é descrito na seção 5.1.3.

5.1.1 Usinas e rede de transmissão

Inicialmente, as hidrelétricas utilizadas nos sistemas teste são apresentadas na Figura 25. As usinas representadas por círculo são consideradas a fio d'água. No entanto, conforme comentado na seção 3.2.1, elas possuem capacidade de acumular água durante alguns dias ou semanas, assim na programação diária o seu volume pode variar entre um valor mínimo e máximo.

Na Figura 25, os parênteses indicam o número de unidades por grupo de cada usina e o colchete representa o tempo de viagem da água (em horas) entre duas usinas; quando este último não existir, o tempo é

de uma hora. Note que as usinas estão numeradas e dispostas em cascatas, sendo que cada sistema da Tabela 4 possui uma ou mais cascatas. O sistema A é composto pela cascata 2, o sistema B pela cascata 1, o sistema C pela cascata 1 e parte da cascata 2, o sistemas D pelas cascatas 1 e 2 e o sistemas E pelas cascatas 3,4,5 e 6.

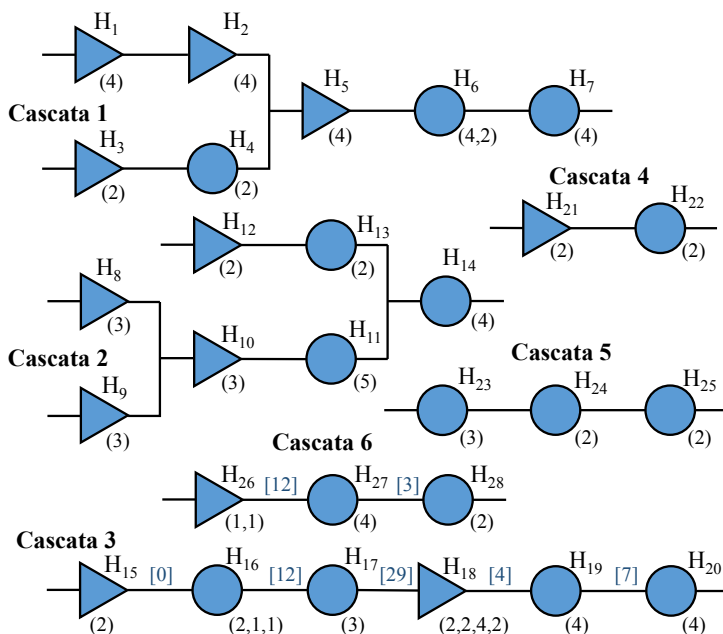


Figura 25: Usinas hidrelétricas dos casos teste.

As informações das usinas hidrelétricas e termelétricas são apresentados no Apêndice B – Dados dos Sistemas Teste. Os dados dos reservatórios das hidrelétricas são apresentados na Tabela 35. As demais informações dos polinômios de cota de montante e de jusante são apresentados na Tabela 36 e Tabela 37. Por sua vez, os dados das unidades hidrelétricas que compõem os grupos são apresentados na Tabela 38 e na Tabela 39, esta última apresenta os coeficientes do polinômio de rendimento hidráulico. Os dados relativos aos custos das usinas termelétricas são apresentados na Tabela 40. As demais informações das termelétricas, como limites de geração, tempos mínimos de permanência em e fora de operação bem como as rampas de incremento e decremento são apresentadas na Tabela 41.

Todos os sistemas possuem a mesma rede de transmissão (com mesmo número de barras e linhas), cuja topologia é ilustrada na Figura 26. A barra 30 é a barra de referência do sistema.

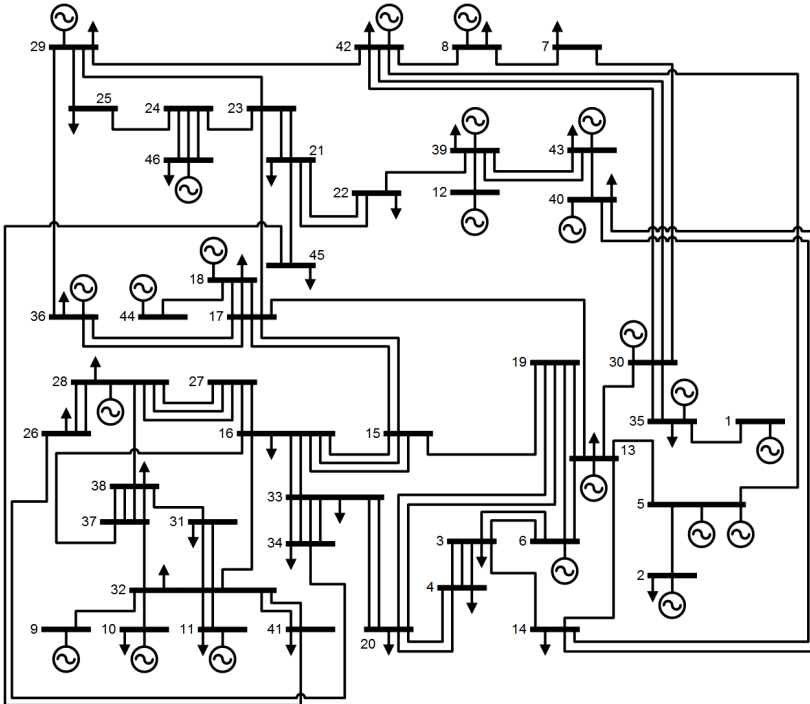


Figura 26: Sistema de transmissão.

Na Figura 26 os geradores não estão identificados, pois isso depende do sistema teste que está sendo usado. A Tabela 5 indica, para cada sistema da Tabela 4, quais os geradores conectados em cada barra.

Tabela 5: Informação de geradores conectados as barras.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
B₁	T ₆	T ₂₀	T ₃₂	T ₃₉	T ₁₀	B₂₈	-	-	T ₉	-	-
B₂	T ₁₁	H ₂	H ₂	H ₂	H ₁₇	B₂₉	H ₁₁	T ₂₇	-	H ₁₁	H ₂₆
B₅	T ₈	H ₃	H ₃	H ₃	H ₂₈	B₃₀	T ₇	T ₂₁	T ₃₃	T ₄₀	T ₄₀
B₅	T ₉	H ₄	H ₄	H ₄	H ₁₅	B₃₅	-	-	T ₁	-	-
B₆	T ₅	T ₁₉	T ₃₁	T ₃₈	T ₃₃	B₃₆	H ₁₀	T ₂₆	-	H ₁₀	H ₂₅
B₈	T ₁₄	H ₇	H ₇	H ₇	H ₂₀	B₃₉	H ₁₃	T ₂₃	H ₁₃	H ₁₃	H ₂₂
B₉	T ₁	T ₁₅	T ₁₉	T ₃₅	T ₂₉	B₄₀	T ₁₃	H ₆	H ₆	H ₆	H ₁₉
B₁₀	T ₂	T ₁₆	T ₂₀	T ₃₆	T ₄₁	B₄₂	T ₁₂	H ₅	H ₅	H ₅	H ₁₈

B₁₁	T ₃	T ₁₇	T ₂₉	T ₃₇	T ₃₁	B₄₃	H ₁₄	T ₂₈	H ₁₄	H ₁₄	H ₂₇
B₁₂	H ₁₂	T ₂₂	H ₁₂	H ₁₂	H ₂₁	B₄₄	H ₉	T ₂₅	-	H ₉	H ₂₄
B₁₃	T ₁₀	H ₁	H ₁	H ₁	H ₁₆	B₄₆	T ₄	T ₁₈	T ₃₀	T ₂₁	T ₃₂
B₁₈	H ₈	T ₂₄	T ₃₄	H ₈	H ₂₃						

Os dados das linhas de transmissão são apresentados no Apêndice B, Tabela 42.

Por fim, o custo de déficit é igual a 50.000, 50.000, 500.000, 50.000, 5.000.000 R\$/MW, respectivamente para os sistemas A, B, C, D e E. Os valores são diferentes pois dependem das características de custo e operação das termelétricas de cada sistema teste. A ideia é ter um custo de déficit superior ao mínimo custo de operação da termelétrica mais cara, caso contrário ao invés de acionar a térmica mais cara seria preferível ter déficit. Adicionalmente, o valor de reserva girante para cada período é proporcional à demanda total neste mesmo período. Em geral, o SIN, que é um sistema maior, mais robusto, opera com uma reserva girante em torno de 5% da demanda máxima de cada região; porém, nos sistemas teste considerou-se um valor de 10% da demanda total de cada período.

5.1.2 Condições iniciais

Além dos dados apresentados na seção anterior, existem ainda outras informações necessárias para a execução dos testes como o nível inicial do reservatório, o volume meta, o estado operativo e o nível de geração das termelétricas. Essas informações são consideradas como condições iniciais e podem ser diferentes para cada caso e sistema testado.

Os valores de volume útil inicial e volume útil meta avaliados com base no volume útil total de cada sistema são apresentados na Tabela 6. Os valores individuais de cada usina hidrelétrica são apresentados no Apêndice B, Tabela 43, Tabela 44 e Tabela 45.

Tabela 6: Volume meta e inicial em valores de volume útil.

Volume útil (%)				
	v^{meta}	$v_{0,a}$	$v_{0,m}$	$v_{0,b}$
A	50,0	57,5	55,0	52,5
B	50,0	51,1	50,8	50,0
C	50,0	55,0	51,0	49,1
D	50,0	51,5	51,1	50,8
E	60,4	62,5	61,4	60,4

Por sua vez, as condições iniciais das termelétricas são o nível de geração, em MW, da usina na hora anterior ao início do planejamento, o

seu estado operativo (1 = ligada ou 0 = desligada) e a quantidade de horas em que a usina está no seu estado operativo inicial. Essas informações estão na Tabela 46 e na Tabela 47, do Apêndice B.

5.1.3 Geração dos cenários

Os valores de demanda e afluência incremental são organizadas em forma de árvore de cenários ou simplesmente em um cenário, no caso determinístico. Nesta seção busca-se descrever os procedimentos para a criação dos valores utilizados nos experimentos. Esses valores são gerados de uma forma padrão, por meio do sorteio das realizações, utilizando distribuição normal. O tamanho das árvores é definido e identificado pelo número total de cenários: 1, 4, 9, 16 e 25 (combinação dos cenários de afluência e demanda).

Para a obtenção dos valores de demanda utiliza-se um perfil de curva de carga horária, para o primeiro estágio (primeiras 24 horas). Os cenários do segundo estágio são valores sorteados em torno dessa curva, gerando assim diferentes possibilidades para a demanda do segundo estágio. A demanda para cada barra é então distribuída de acordo com um valor base para cada barra.

A Figura 27 ilustra o perfil da curva de demanda total com cinco cenários de demanda. Esse perfil de demanda total é igual para todos os sistema teste, o que muda são seus valores absolutos, diferentes para cada sistema teste, pois a curva é normalizada de acordo com a capacidade de geração.

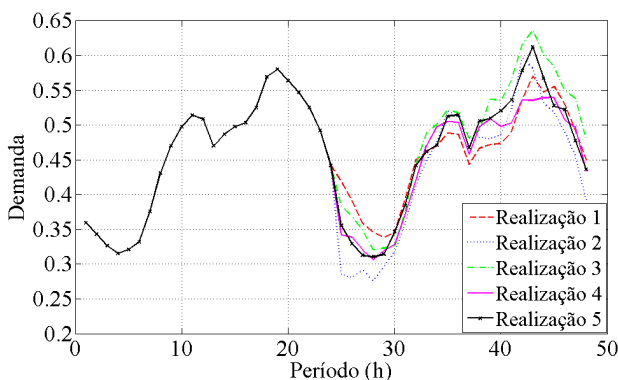


Figura 27: Perfil de curva de demanda.

Por sua vez, os cenários de afluência foram gerados com base em sorteios realizados em torno de determinados valores de vazão incremental, y_{base} , calculados com base na capacidade de vazão turbinada mínima e máxima das usinas¹⁵. Para cada usina sorteia-se um valor entre 0 e 2 (distribuição uniforme) e multiplica-se o y_{base} por esse valor sorteado para gerar a realização de segundo estágio. Os valores de vazão base para cada hidrelétrica são apresentados na Tabela 7, destacando-se que a afluência incremental tem um valor para cada estágio (constante durante os períodos do estágio), diferente da demanda que tem-se um valor para cada hora. No entanto, mesmo que esses valores não fossem constantes durante o estágio a metodologia poderia ser aplicada da mesma maneira.

Tabela 7: Valor base da afluência incremental.

	y_{base} (m³/s)		y_{base} (m³/s)		y_{base} (m³/s)		y_{base} (m³/s)
H₁	193,60	H₈	72,72	H₁₅	30,08	H₂₂	18,88
H₂	178,56	H₉	78,72	H₁₆	32,32	H₂₃	21,60
H₃	21,92	H₁₀	184,80	H₁₇	79,92	H₂₄	50,88
H₄	20,96	H₁₁	224,00	H₁₈	181,12	H₂₅	46,40
H₅	222,08	H₁₂	14,72	H₁₉	146,88	H₂₆	12,96
H₆	251,20	H₁₃	18,88	H₂₀	216,32	H₂₇	20,48
H₇	295,68	H₁₄	261,76	H₂₁	14,72	H₂₈	24,32

Por simplificação, assume-se neste trabalho que a previsão de demanda e de vazão incremental não tem correlação alguma. Assim, as realizações podem ser combinadas uma a uma. Por exemplo, a Figura 28 ilustra um problema com duas realizações (cenários) para cada variável, demanda e vazão incremental, que combinadas resultam em quatro cenários para as 24 horas do segundo estágio.

¹⁵ Esse procedimento é realizado dessa forma, principalmente, devido à dificuldade de acesso aos dados horários do SIN, tais como valores de afluência incremental e geração de cada usinas e demanda de cada barra.

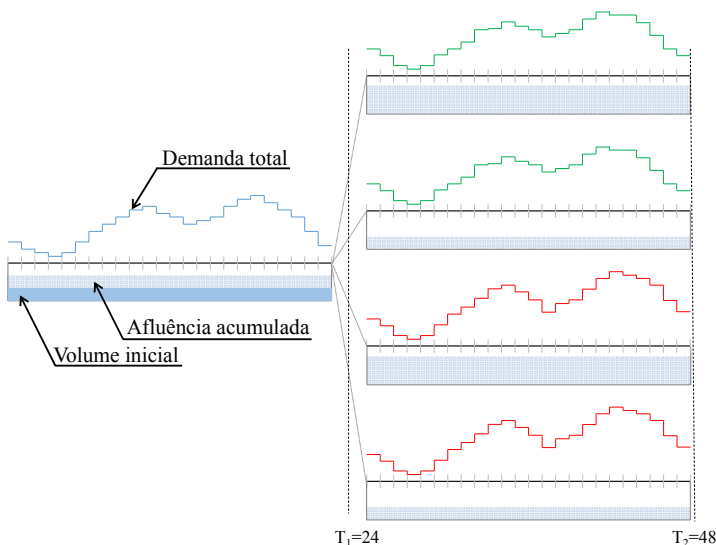


Figura 28: Perfil de curva de demanda.

Por fim, vale lembrar que o foco deste trabalho é a metodologia de solução do problema, sendo que o procedimento de geração de cenários não é aprofundado, bem como não é feita uma análise de sua representatividade. No entanto, os valores sorteados são limitados à valores coerentes, dentro dos limites operativos e obtidos de acordo com as características do sistema. Além disso, na programação diária a ideia é que os cenários sejam gerados com conhecimento de especialistas, pois devido a outras complexidades e a proximidade com o tempo real o objetivo é reduzir ao máximo o tamanho do problema, e portanto reduzir também o número de cenários considerados.

5.2 EXPERIMENTOS COM A RL

Neste capítulo são descritos os experimentos realizados na etapa da RL, comparando as diferentes estratégias de decomposição aplicadas à PDE. Inicialmente apresentam-se os resultados com relação ao uso de componentes simples, conforme citado na Seção 4.2.3. Em seguida, as quatro diferente estratégias de decomposição (SpcDec1, SpcDec2, SpcDec3 e ScnDec) são comparadas para os casos determinísticos. Por fim, é feita a mesma comparação considerando incertezas no problema.

5.2.1 Componente simples

Nesta seção apresentam-se as vantagens do uso das componentes simples, conforme já comentado na seção 4.3.3.

O desempenho do uso de componentes simples, assim como a comparação entre estratégias e ajustes dos demais experimentos, são medidos por meio de curvas de perfil de desempenho (DOLAN; MOREÉ, 2002). Essas curvas são uma função de distribuição acumulada em função de um fator multiplicador, definidas da seguinte maneira:

$$\phi_x(fm) = \frac{\text{número de problemas tais que } n_x(p) \leq fm \cdot n^*(p)}{\text{número total de problemas}}, \quad (108)$$

em que:

- ϕ_x é a probabilidade acumulada com relação ao desempenho do método X;
- fm é o fator de multiplicação;
- $n_x(p)$ é a medida de desempenho do método X para resolver o problema p (e.g. o número de iterações);
- $n^*(p)$ é a medida de desempenho do melhor método (menor valor) para resolver o problema p , por exemplo, o menor número de iterações dentre os métodos testados.

O termo perfil de desempenho é usado para designar a função de distribuição de uma determinada medida de desempenho do algoritmo, como o número de iterações, o tempo de convergência, entre outros. Assim, o método de resolução com grande probabilidade, ϕ_x , para um fator de multiplicação igual a 1 apresenta melhor desempenho na maioria dos casos testados. Por sua vez, o método que atinge o valor de $\phi_x = 1$ para um menor fator de multiplicação, fm , é mais robusto, ou seja, considerando todos os casos este é o método que em média gera os melhores resultados.

Portanto, dois pontos principais são observados nas curvas de perfil de desempenho de um método. O valor da probabilidade acumulada para $fm = 1$, que representa a porcentagem de casos em que seu desempenho é melhor, e a robustez, expressa pelo fator que garante uma probabilidade elevada (próxima ou igual a 1) para os diferentes valores de fm . A Figura 29 ilustra alguns casos.

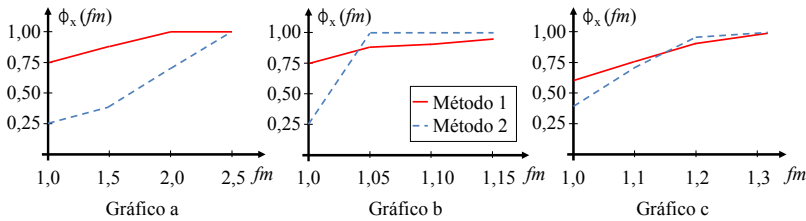


Figura 29: Ilustração das curvas do perfil de desempenho.

No gráfico a o método 1 tem melhor desempenho nos casos testados (maior probabilidade em $fm = 1$) e maior robustez (atinge probabilidade de 1 em um valor menor de fm que o outro método). Por sua vez, no gráfico b, o método 1 tem melhor desempenho para $fm = 1$, no entanto não é tão robusto (o método 2 atinge a probabilidade acumulada de 1 antes, para valores baixos de fm). Além disso, se existir alguma tolerância com relação à medida de desempenho pode-se ter outra conclusão. Por exemplo, se a medida de desempenho for o número de iterações e aceita-se uma tolerância de 5% no número de iterações, ou seja, se o método convergir com 100 ou 105 iterações for o mesmo resultado, então no gráfico b o método 2 é preferível, pois para um fator de 1,05 ele apresenta uma maior probabilidade acumulada. No caso do gráfico c o melhor método depende da tolerância que deseja-se com relação à medida de desempenho.

As estratégias que permitem a aplicação de componentes simples são a SpcDec2 e SpcDec3. Em ambas são testados 30 casos: 15 casos determinísticos (5 sistemas teste com 3 condições de volume inicial cada um) e os mesmos 15 casos com dados de entrada incertos (com 4 cenários).

A Figura 30 apresenta o perfil de desempenho para a estratégia de decomposição SpcDec2, utilizando como medida de desempenho o número de iterações até a convergência. A sigla ‘ccs’ representa o modelo considerando componentes simples e ‘scs’ sem a técnica de componentes simples.

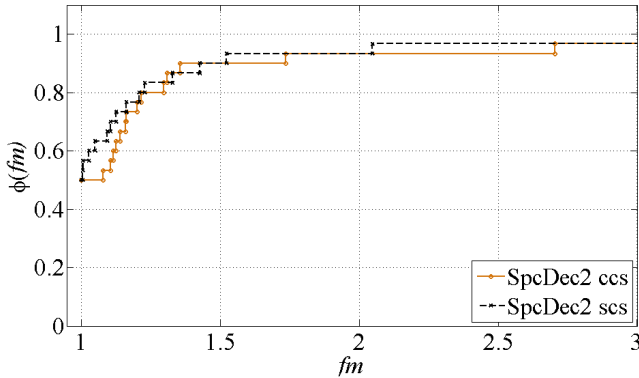


Figura 30: Perfil de desempenho para a SpcDec2 com e sem componentes simples.

Pela figura observa-se que o uso de componentes simples não traz grandes vantagens, pois tem um desempenho muito semelhante ao modelo sem componentes simples. No entanto, contabilizando a redução relativa do número de iterações, o uso de componentes simples na SpcDec2 representou uma redução média de 18% (com um desvio padrão de 114%), o que proporcionou uma redução média de 22% no tempo de processamento (com um desvio padrão de 131%).

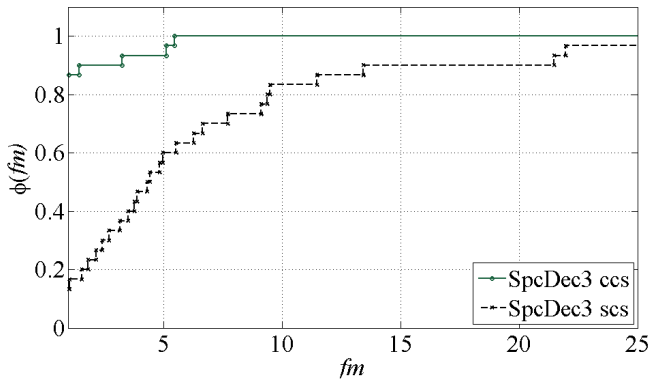


Figura 31: Perfil de desempenho para a SpcDec3 com e sem componentes simples.

Por sua vez, na SpcDec3, os resultados foram mais expressivos. Conforme pode-se observar na Figura 31, o uso de componentes simples, ‘ccs’ resulta em um melhor desempenho nos casos testados e maior robustez, pois apresenta um valor maior de probabilidade em $fm = 1$ e converge para probabilidade de 100% em um valor bem inferior do fator

de multiplicação. O número de iterações é menor em cerca de 85% dos casos (com $fm = 1$) e a probabilidade acumulada é de 100% para um fator próximo de 5. Além disso, considerando todos os 30 casos testados, o uso de componentes simples representou uma redução média de 598% no número de iterações (com um desvio padrão de 807%), o que proporcionou uma redução média de 2544% no tempo computacional (com um desvio padrão de 5016%).

O uso de componentes simples é mais vantajoso na estratégia SpcDec3 do que na SpcDec2 devido, principalmente, pela diferença entre as estruturas dos subproblemas referentes à operação das hidrelétricas. Ao invés de um subproblema de PLIM por cascata, na SpcDec3 tem-se vários PLIM menores e um problema de PL por cascata. Dessa forma, existem mais subproblemas considerados como componentes simples, resultando em um melhor desempenho da estratégia.

Consequentemente, todos os experimentos apresentados a seguir foram realizados considerando o uso de componentes simples, sempre que for possível a sua aplicação.

5.2.2 Casos determinísticos

Nessa seção são apresentados os resultados comparativos das decomposições para os casos determinísticos. Como a decomposição por cenários não pode ser aplicada, são comparadas as decomposições SpcDec1, SpcDec2 e SpcDec3, para os cinco sistemas teste com as três condições iniciais de volume armazenado, o que resulta em 15 casos.

Para avaliar as estratégias utiliza-se a abordagem de perfil de desempenho apresentada anteriormente; porém, neste caso além do número de iterações usam-se mais duas métricas de desempenho, o tempo de processamento e o valor da função dual obtida.

O perfil de desempenho é traçado considerando 15 casos, executados com estratégia. Na Figura 32 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao número de iterações.

Por sua vez, na Figura 33 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao tempo de processamento.

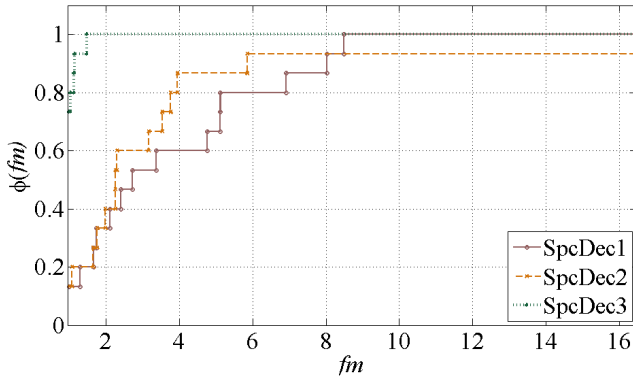


Figura 32: Perfil de desempenho (número de iterações) da RL - determinístico.

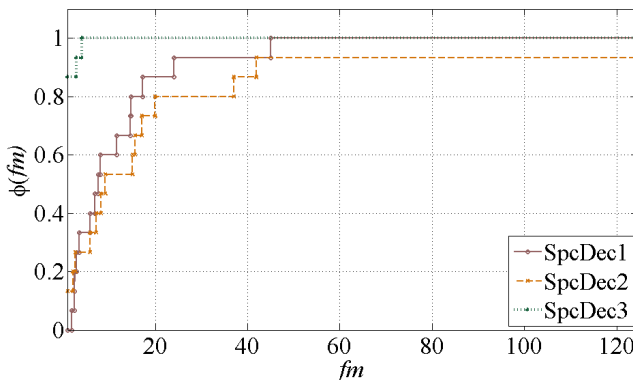


Figura 33: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RL - determinístico.

Tanto o número de iteração quanto o tempo de processamento é menor na maioria dos casos usando a SpcDec3 (para $fm = 1$). Essa estratégia também é mais robusta que as demais, pois atinge o valor de 1 para o menor valor do fator de multiplicação.

Além disso, nota-se na Figura 32 que a medida que o fator multiplicador aumenta a SpcDec2 converge em mais casos com menos iterações do que a SpcDec1. Por outro lado, na Figura 33, observa-se que a medida que fm aumenta, o número de casos com menor tempo de processamento é maior na SpcDec1 do que na SpcDec2. Em outras palavras a SpcDec2 converge em menos iterações na maioria dos casos, porém leva mais tempo para convergir do que a SpcDec1. Esse fato também pode ser observado na Tabela 8, em que a média do tempo de

processamento da SpcDec1 é menor que da SpcDec2; porém, a média do número de iterações é maior.

Na Figura 34 o desempenho é medido em termos do valor da função dual, ou seja, o limite inferior do problema fornecido por cada estratégia. Neste caso, um valor maior da função dual é melhor, ou seja, um limite inferior maior para custo esperado de operação. Assim, para estar de acordo com a abordagem de perfil de desempenho usa-se a diferença com relação ao melhor limite inferior (*MLI*) de cada caso.

$$n_x = \frac{MLI - LI}{MLI} + 1, \quad (109)$$

em que:

MLI é o melhor (maior) valor de limite inferior dentre as estratégias testadas;

LI é o limite inferior ou função dual obtido pela estratégia.

$n_x(p)$ é a medida de desempenho do método X.

Dessa forma, o maior valor de *LI* é o melhor e um fator *fm* igual a 1,05, por exemplo, representa os casos com função dual menor ou igual a 5% do *MLI*. Assim, para um melhor limite inferior de 100, os casos com valores de função dual entre 95 e 100 são contabilizados na probabilidade acumulada.

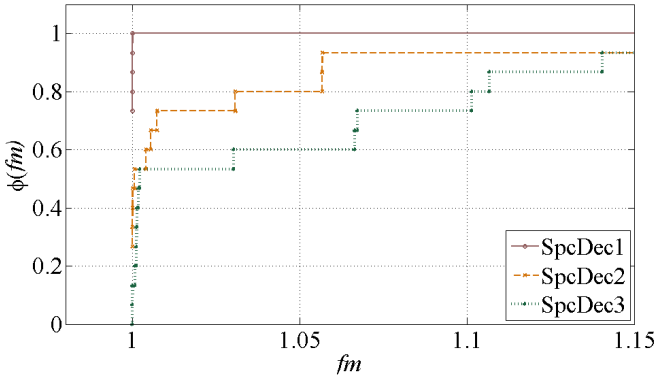


Figura 34: Perfil de desempenho (valor da função dual) da RL - determinístico.

Observa-se que a estratégia SpcDec1 apresenta valores superiores de função dual para a maioria dos casos e também é mais robusta. Ainda, os valores das outras decomposições estão na maioria bem próximos. Com valores pequenos do fator multiplicador todas as estratégias apresentam probabilidades altas de gerarem valores de função dual

próximas da melhor solução. Se for analisado um valor de $fm = 1,15$, por exemplo, admite-se 15% de tolerância no valor final da função dual, ou seja, casos com valores entre 85% e 100% do valor do *MLI* são contabilizados. Todas as estratégias apresentam probabilidade acumulada acima de 90% para uma tolerância de 15%. Essa proximidade entre os *LI* dos três métodos também pode ser observado na Tabela 8, por meio dos valores baixos de *gap1*.

Na Tabela 8 apresentam-se alguns valores comparativos de média e desvio padrão dos casos testados em cada estratégia. Nessa tabela, *gap1* é a brecha de dualidade e *gap2* é a distância relativa da solução dual e da solução contínua do problema estendido, PLE (usada como ponto de partida no método de Feixes, conforme Figura 24).

$$gap1 = \frac{LS - LI}{LI}, \qquad gap2 = \frac{LI - CR}{CR}, \qquad (110)$$

em que:

- LS*

é o limite superior obtido pelo método de resolução. No caso dos experimentos somente com a RL é utilizada a solução primal obtida por meio do pacote de otimização Gurobi;
- LI*

é limite inferior obtido pelo método de resolução;
- CR*

é a solução do problema PLE.

Adicionalmente, na Tabela 8 tem-se colunas com a porcentagem do tempo total gasto com os subproblemas, o tempo de processamento e o número de iterações de cada estratégia. Essas duas últimas colunas são apresentadas em termos de valores relativos, com relação ao método que apresenta o menor valor.

Tabela 8: Comparação das estratégias na RL - determinístico.

Estratégia	Métrica	Gap1 (%)	Gap2 (%)	Tempo relativo	Tempo Subp. (%)	N. de iter. relativo
SpcDec1	Média	1,4	126,3	10,1	87,7	4,0
	Desv.Pad.	2,1	313,8	17,5	10,9	5,0
SpcDec2	Média	2,2	137,0	10,3	85,9	2,4
	Desv.Pad.	4,3	290,4	9,5	16,1	2,0
SpcDec3	Média	5,1	121,7	1	38,8	1
	Desv.Pad.	4,7	258,6	1	12,3	1

Na Tabela 8, o tempo de processamento em minutos e o número absoluto de iterações podem ser calculados com base nos resultados da SpcDec3. A média e o desvio padrão do tempo de processamento da

SpcDec3 são de 3,0 e 2,8 minutos, respectivamente. Por sua vez, a média e o desvio padrão do número de iterações são de 84 e 80, respectivamente.

Portanto, considerando como principais fatores o tempo de convergência e o valor do limite inferior obtido, o desempenho da SpcDec3 lhe assegura ser a melhor estratégia. Principalmente porque os subproblemas que representam a operação das hidrelétricas nas decomposições SpcDec1 e SpcDec2 são mais complicados (com mais acoplamentos e de maior porte). Como pode ser observado na Tabela 8, os tempos de processamento gastos com os subproblemas foram bem maiores nas decomposições 1 e 2. Em algumas iterações o pacote de otimização (Gurobi) não gera uma solução para o subproblema (nem mesmo um limite inferior para sua solução) atrapalhando a convergência do método de Feixes. Assim, uma das alternativas para essas estratégias de decomposição seria implementar algoritmos mais eficientes ou decompor ainda mais o subproblema em questão (facilitar mais cada subproblema), que é o caso da estratégia SpcDec3.

Por fim, a Figura 35, Figura 36 e Figura 37 a ilustram o processo iterativo das estratégias SpcDec1, SpcDec2 e SpcDec3, respectivamente, com os valores da Função dual e da norma usados como critérios de convergência para o sistema A com volume inicial alto.

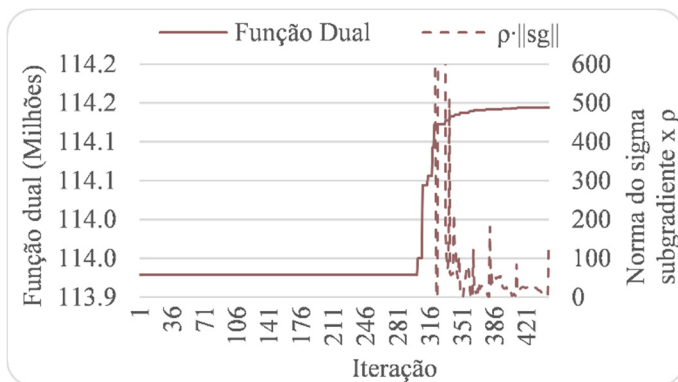


Figura 35: Convergência da RL com SpcDec1 para o sistema Aa.

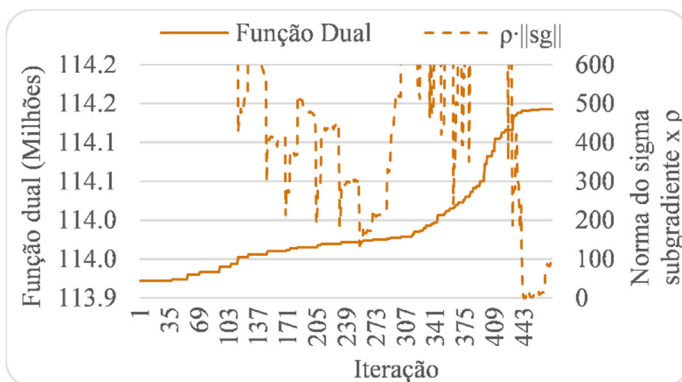


Figura 36: Convergência da RL com SpcDec2 para o sistema Aa.

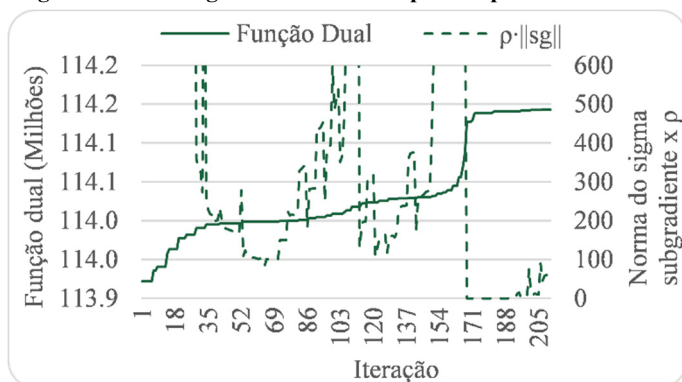


Figura 37: Convergência da RL com SpcDec3 para o sistema Aa.

5.2.3 Casos estocásticos

Nessa seção são apresentados os resultados dos experimentos com a RL para os casos estocásticos, comparando as estratégias SpcDec1, SpcDec2, SpcDec3 e ScnDec, para os cinco sistemas teste com as três condições iniciais de volume armazenado. Em consequência tem-se um total de 30 casos (15 com 4 cenários e 15 com 9).

Para avaliar as estratégias utiliza-se uma abordagem semelhante à seção anterior, com as curvas de perfil de desempenho. Na Figura 38 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao número de iterações para os 30 casos.

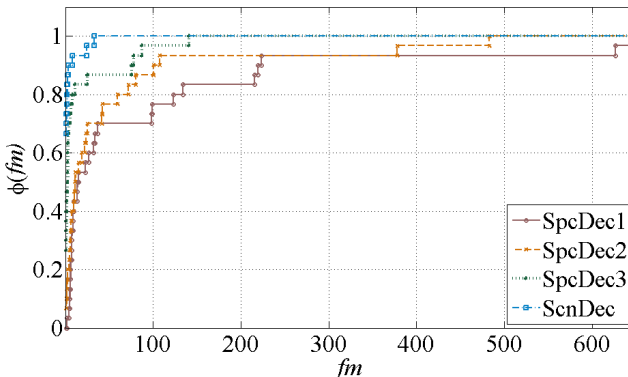


Figura 38: Perfil de desempenho (número de iterações) da RL - estocástico.

Por sua vez na Figura 39 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao tempo de processamento.

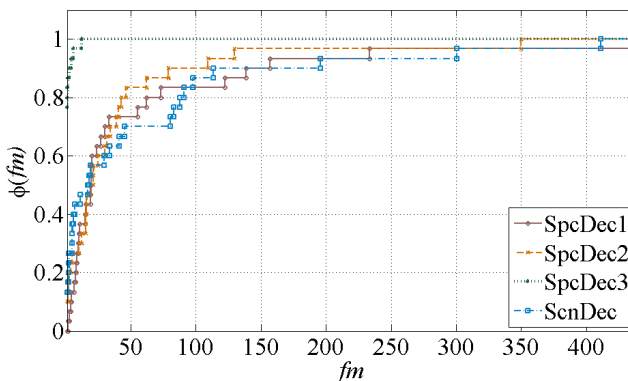


Figura 39: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RL - estocástico.

Nota-se na Figura 38 que a decomposição por cenários converge em poucas iterações na maioria dos casos (probabilidade alta com $fm = 1$). No entanto, é uma das estratégias que mais consome tempo de processamento, conforme observado na Figura 39. Isso acontece pois os subproblemas da ScnDec são mais complicados e a cada iteração gasta-se bastante tempo na resolução de seus problemas de PLIM. Além disso, observa-se que a estratégia SpcDec3 leva vantagem no tempo de processamento, sendo o método mais robusto e convergindo na grande maioria dos casos em tempos inferiores à demais estratégias.

A Figura 40 ilustra o desempenho medido em termos do valor da função dual fornecido por cada estratégia.

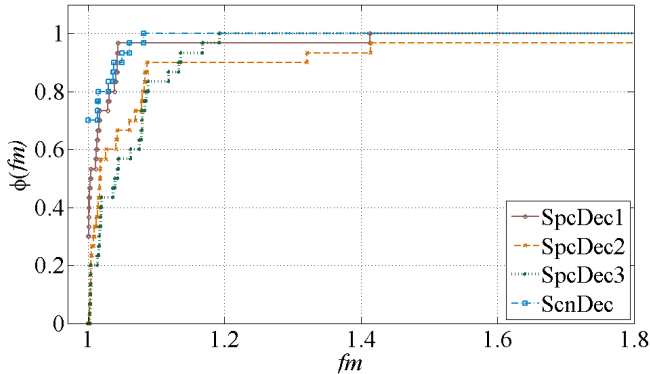


Figura 40: Perfil de desempenho (valor da função dual) da RL - estocástico.

Nota-se que apesar das estratégias SpcDec1 e ScnDec apresentarem o maior número de casos com tempos computacionais elevados (probabilidades baixas para $fm = 1$ na Figura 39) elas apresentam as maiores probabilidades com relação ao limite inferior, ou seja, convergem para valores ligeiramente melhores (superiores) de função dual na maioria dos casos. No entanto, nota-se que essas diferenças nos valores da função dual são pequenos, pois se for tolerada uma diferença de 10% ($fm = 1,1$) praticamente todas estratégias convergem para o mesmo valor, em pelo menos 80% dos casos. Assim, todos os métodos são razoavelmente robustos com relação ao desempenho do valor da função dual.

A Tabela 9 e a Tabela 10 são semelhantes à Tabela 8 da seção anterior, pois resumem alguns valores comparativos de média e desvio padrão dos casos estocásticos com 4 e 9 cenários, respectivamente.

Para se obter os valores absolutos da Tabela 9 utilizam-se os resultados da SpcDec3 e da ScnDec. A média e o desvio padrão do tempo de processamento da SpcDec3 são de 19,3 e 25,7 minutos, respectivamente. Por sua vez, e a média e o desvio padrão do número de iterações da ScnDec são de 27,6 e 16,5, respectivamente.

Tabela 9: Comparação das estratégias na RL caso estocástico com 4 cenários.

Estratégia	Métrica	Gap1 (%)	Gap2 (%)	Tempo relativo	Tempo Subp. (%)	N. de iter. relativo
SpcDec1	Média	2,1	168,9	21,4	70,5	32,0
	Desv.Pad.	2,3	517,9	13,9	12,7	30,8
SpcDec2	Média	10,5	142,0	11,2	80,1	11,8
	Desv.Pad.	20,8	286,6	6,5	21,2	14,0
SpcDec3	Média	7,2	171,4	1	24,5	3,7
	Desv.Pad.	6,9	370,1	1	7,9	6,3
ScnDec	Média	1,6	197,9	10,3	99,8	1
	Desv.Pad.	2,1	424,7	5,3	0,5	1

Tabela 10: Comparação das estratégias na RL caso estocástico com 9 cenários.

Estratégia	Métrica	Gap1 (%)	Gap2 (%)	Tempo relativo	Tempo Subp. (%)	N. de iter. relativo
SpcDec1	Média	3,6	20,1	13,1	48,9	8,1
	Desv.Pad.	2,7	47,2	9,8	21,1	10,4
SpcDec2	Média	4,3	23,8	27,0	62,4	8,9
	Desv.Pad.	4,4	44,4	28,1	25,6	12,8
SpcDec3	Média	6,6	123,5	1	16,2	1,3
	Desv.Pad.	6,6	377,9	1	6,5	1,3
ScnDec	Média	1,9	143,2	15,7	98,9	1
	Desv.Pad.	2,2	436,4	10,3	0,8	1

Na Tabela 10, o tempo de processamento em minutos e o número absoluto de iterações podem ser calculados com base nos resultados da SpcDec3 e da ScnDec. A média e o desvio padrão do tempo de processamento da SpcDec3 são de 19,3 e 25,7 minutos, respectivamente. Por sua vez, a média e o desvio padrão do número de iterações da ScnDec são de 27,6 e 16,5, respectivamente.

Nas tabelas pode-se destacar o desempenho de duas estratégias, a ScnDec e a SpcDec3. Inicialmente observa-se novamente como cada iteração da ScnDec é custosa computacionalmente, sendo a maior parte do tempo total de processamento é utilizada em sua resolução. Adicionalmente, apesar da ScnDec apresentar tempos de convergência razoáveis, resulta nos menores valores de *gap1*, ou seja, gera os melhores limites inferiores para o problema. Por sua vez, a SpcDec3 apresenta tempos de processamentos bem baixos e valores de *gap1* ligeiramente acima dos demais.

Na Figura 41 ilustra-se o processo iterativo do sistema teste A com volume inicial alto e 9 cenários. Note que para as estratégias SpcDec1 e

SpcDec2 a função dual permanece em seus valores iniciais; no entanto, a norma do sigma-subgradiente reduz ao longo das iterações.

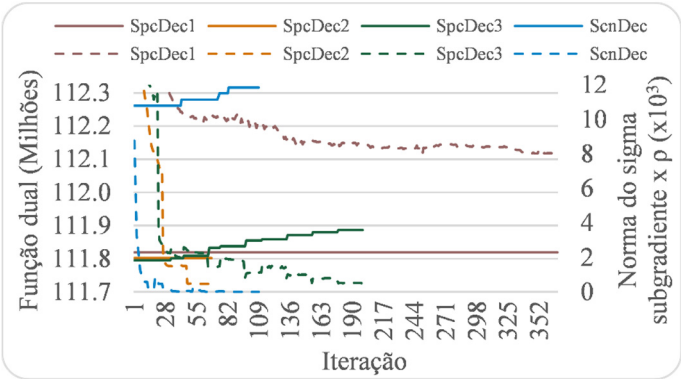


Figura 41: Convergência da RL com todas estratégias para o sistema A9a.

5.2.4 Análise da característica do sistema e condições iniciais de armazenamento

Além da comparação entre as estratégias de resolução pode-se ainda observar os resultados com relação a distribuição das fontes de geração, ou seja, o tipo de sistema teste. A Tabela 11 apresenta esses resultados obtidos considerando os casos determinísticos e estocásticos, exceto para a ScnDec, que não é aplicável para problemas com somente um cenário.

Tabela 11: Comparação do desempenho na RL com relação ao tipo de sistema.

Sist. teste	Métrica	SpcDec1		SpcDec2		SpcDec3		ScnDec	
		Gap1	Tempo	Gap1	Tempo	Gap1	Tempo	Gap1	Tempo
		(%)	rel.	(%)	rel.	(%)	rel.	(%)	rel.
A	Média	0,3	6,5	0,4	7,8	0,4	1	0,2	9,1
	Desv.Pad.	0,2	6,6	0,2	17,4	0,2	1	0,1	8,2
B	Média	10,9	11,1	10,4	13,1	12,8	1	4,1	63,0
	Desv.Pad.	28,0	9,3	20,4	12,6	7,6	1	3,2	67,7
C	Média	4,6	70,2	8,2	30,9	7,3	1	1,6	75,4
	Desv.Pad.	3,0	78,7	5,4	46,2	3,4	1	1,4	75,1
D	Média	2,4	20,1	9,8	58,3	9,7	1	2,0	57,4
	Desv.Pad.	2,0	20,1	22,4	92,2	5,0	1	1,0	35,4
E	Média	2,1	10,6	2,0	32,4	2,1	1	0,8	6,6
	Desv.Pad.	1,1	8,1	0,8	36,4	0,8	1	0,4	4,9

A média dos tempos de processamento (desvio padrão) para a estratégia SpcDec3 são de 88,1, 11,2, 9,0, 18,4 e 38,6 minutos (96,6, 13,1,

11,8, 23,3 e 44,4 minutos), para os sistemas A, B, C, D e E, respectivamente.

Nota-se na Tabela 11 que sistemas com maior participação de hidrelétricas (B, C e D) na capacidade de geração apresentam maiores valores de *gap1* e, em geral, demoram mais tempo para convergir. Os maiores valores de *gap1* para todas as estratégias foram do sistema B, cuja capacidade de geração corresponde à 75% do total. Por outro lado, os menores valores foram no sistema teste A, cuja participação de termelétrica é mais significativa.

Adicionalmente pode-se analisar os resultados de acordo com a condição inicial do problema. A Tabela 12 apresenta a média e o desvio padrão dos valores do *gap1*, em %, considerado todas as estratégias e casos testados.

Tabela 12: Desempenho na RL com relação à condição de volume inicial.

Sistema teste	Volume inicial baixo		Volume inicial médio		Volume inicial alto	
	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.
A	0,3	0,2	0,3	0,2	0,4	0,2
B	3,0	3,2	5,4	4,8	25,9	29,1
C	1,7	1,7	7,9	3,8	7,7	3,8
D	6,0	6,3	3,4	2,8	11,8	20,7
E	1,9	1,1	1,9	1,0	1,7	0,8

Observa-se pela Tabela 12 que, em geral, casos com o volume inicial alto exigem maior esforço computacional, principalmente nos sistemas B e D, em que a capacidade de geração por recursos hídricos é de aproximadamente 75%.

Por fim, pode-se considerar que as estratégias que apresentam os melhores desempenhos são a SpcDec3 e a ScnDec. A primeira apresenta valores de *gap1* razoáveis e tempos computacionais bem inferiores às demais estratégias, principalmente devido ao uso de componentes simples. Por sua vez, a segunda estratégia apresenta tempos razoáveis e os menores valores de brecha de dualidade. Além disso, essas duas estratégias abrangem os dois grupos mais comuns de decomposição dual aplicados ao problema de programação em sistemas hidrotérmicos: decomposição por cenários e decomposição espacial. Assim os experimentos apresentados nas seções seguintes, com a RL e a RP, são aplicados para esses dois tipos de decomposição.

5.3 EXPERIMENTOS COM A RL E RP

Nesta seção são apresentados os resultados considerando a aplicação da metodologia de RP descrita na Seção 4.3, em conjunto com a RL, conforme esquema da Figura 24. Inicialmente é analisado o desempenho da heurística com relação aos diferentes parâmetros a serem utilizados, tanto nos casos determinísticos (decomposição SpcDec3), quanto nos casos com incertezas (decomposições SpcDec3 e ScnDec). Em seguida, apresentam-se os resultados para os casos determinísticos, considerando o melhor ajuste da heurística, comparando ainda a decomposição SpcDec3 com o pacote de otimização Gurobi. Por fim, são analisados os casos estocásticos, comparando as estratégias ScnDec, SpcDec3 e o Equivalente Determinístico (ED) resolvido por meio do Gurobi.

Vale destacar que os critérios de parada e a tolerância utilizados nesses experimentos são os mesmos da seção anterior. No entanto, desta vez os limites de tempo de processamento são de 20 e 40 minutos, para os casos determinísticos e estocásticos, respectivamente. Assim, nesses experimentos o método dos Feixes é parado pelo limite de tempo, diferentemente da seção anterior, em que os limites de tempo são maiores com o objetivo de parar pelo critério definido em (98) (para analisar o desempenho do método de Feixes). Além disso, os cenários utilizados nesta seção são diferentes daqueles usados na solução via RL.

5.3.1 Ajustes da Heurística

Nesta seção são feitos testes para avaliar o comportamento e determinar os melhores ajustes da metodologia usada na RP. Conforme apresentado na Seção 4.3, a heurística possui três parâmetros de ponderação a serem ajustados, μ_1 , μ_2 e μ_3 , que assumem valores entre 0 e 1. O valor de μ_1 pondera o custo de operação e os termos proximais na função objetivo. Por sua vez, μ_2 define o peso entre as variáveis do pseudo resultado e da solução dos subproblemas. Por fim, μ_3 faz uma ponderação entre as variáveis binárias e contínuas nos termos proximais. Adicionalmente, conforme descrito na Seção 4.4, utiliza-se um parâmetro denominado de FCF_0 que define se as aproximações iniciais da função de custo futuro (obtidas do resultado do PLE) são consideradas. Na Tabela 13 são apresentados os 30 diferentes ajustes testados nos experimentos.

Tabela 13: Tabela de parâmetros de ajuste da heurística.

Ajuste	μ_1	μ_2	μ_3	FCF ₀	Ajuste	μ_1	μ_2	μ_3	FCF ₀
Par1	0,25	0,00	0,50	Sim	Par16	0,25	0,00	0,50	Não
Par2	0,25	0,25	0,50	Sim	Par17	0,25	0,25	0,50	Não
Par3	0,25	0,50	0,50	Sim	Par18	0,25	0,50	0,50	Não
Par4	0,25	0,75	0,50	Sim	Par19	0,25	0,75	0,50	Não
Par5	0,25	1,00	0,50	Sim	Par20	0,25	1,00	0,50	Não
Par6	0,50	0,00	0,50	Sim	Par21	0,50	0,00	0,50	Não
Par7	0,50	0,25	0,50	Sim	Par22	0,50	0,25	0,50	Não
Par8	0,50	0,50	0,50	Sim	Par23	0,50	0,50	0,50	Não
Par9	0,50	0,75	0,50	Sim	Par24	0,50	0,75	0,50	Não
Par10	0,50	1,00	0,50	Sim	Par25	0,50	1,00	0,50	Não
Par11	0,75	0,00	0,50	Sim	Par26	0,75	0,00	0,50	Não
Par12	0,75	0,25	0,50	Sim	Par27	0,75	0,25	0,50	Não
Par13	0,75	0,50	0,50	Sim	Par28	0,75	0,50	0,50	Não
Par14	0,75	0,75	0,50	Sim	Par29	0,75	0,75	0,50	Não
Par15	0,75	1,00	0,50	Sim	Par30	0,75	1,00	0,50	Não

5.3.1.1 Casos determinísticos

Para os casos determinísticos são utilizados três cenários diferentes, com três condições de volumes iniciais para os cinco sistemas, resultando em 45 casos. Assim, cada caso é resolvido para cada ajuste de parâmetros da heurística.

Os resultados para cada tipo de sistema são apresentados na Tabela 14. Para avaliar cada ajuste utiliza-se a diferença relativa entre o resultado primal obtido e o melhor valor obtido entre os 30 ajustes, chamado de *gap3*. Na Tabela 14 existem duas colunas de medidas, uma representa os valores médios (média dos três cenários e três condições iniciais) de *gap3*, em %, e a outra o tempo de processamento, em minutos, para cada ajuste de parâmetros.

Tabela 14: Resultados dos ajustes da heurística para os casos determinísticos.

Ajuste	A		B		C		D		E	
	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.
Par1	0,85	16,48	*	4,51	12,21	14,20	*	4,02	18,11	11,18
Par2	0,42	16,76	*	4,67	10,78	15,34	*	3,99	12,92	10,25
Par3	0,62	16,57	*	4,52	7,55	15,02	*	4,71	1,92	9,94
Par4	0,59	16,94	0,26	4,28	0,59	12,40	11,81	4,04	2,82	10,09
Par5	0,62	16,51	2,18	4,26	0,71	13,93	6,92	3,21	1,36	10,24
Par6	0,79	16,83	*	4,88	11,16	14,28	*	3,52	14,11	11,23
Par7	0,53	15,68	*	4,69	8,32	14,19	*	4,98	9,19	11,22

Par8	0,43 17,94	* 4,49	6,93 10,67	* 4,16	1,07 12,62
Par9	0,39 17,39	6,19 4,24	0,22 12,40	18,87 4,02	2,03 11,28
Par10	0,67 16,52	2,47 4,17	0,54 13,18	37,50 4,10	1,93 11,38
Par11	0,63 16,18	* 4,56	9,29 11,57	* 4,29	7,08 10,39
Par12	0,61 16,35	* 4,76	7,02 13,84	* 3,55	4,01 11,07
Par13	0,29 17,69	* 4,69	6,92 15,07	* 3,40	0,64 9,97
Par14	0,20 16,94	9,03 4,16	0,12 13,54	89,87 4,65	0,06 11,40
Par15	0,28 16,78	4,57 4,22	0,21 14,26	55,70 3,40	1,58 13,11
Par16	1,43 15,00	* 4,68	25,82 14,68	* 4,40	19,62 12,22
Par17	0,94 16,71	* 4,71	21,04 14,83	* 4,47	18,94 13,02
Par18	0,50 15,95	* 4,52	15,51 13,95	* 3,67	7,79 8,55
Par19	0,34 15,64	2,52 4,22	0,76 12,42	* 3,20	1,30 10,66
Par20	0,41 16,12	2,28 4,14	1,05 13,26	* 4,78	1,65 9,13
Par21	1,84 17,07	* 4,81	21,73 13,38	* 4,55	21,23 12,70
Par22	1,27 16,74	* 4,81	19,46 13,78	* 4,99	18,89 14,99
Par23	0,51 16,06	* 4,69	11,48 13,37	* 5,25	5,38 10,44
Par24	0,30 16,15	8,61 4,44	1,57 14,57	43,02 4,28	1,56 10,45
Par25	0,37 17,37	6,46 4,15	1,58 11,81	95,16 4,10	1,57 10,81
Par26	2,21 16,22	* 4,68	20,43 14,29	* 5,67	16,38 14,37
Par27	1,78 17,15	* 4,60	20,12 15,06	* 5,32	15,47 13,54
Par28	0,74 17,43	* 4,67	10,64 14,41	* 4,63	6,19 14,36
Par29	0,40 17,32	13,78 4,32	2,81 15,41	* 5,20	1,58 12,46
Par30	0,43 16,66	5,11 4,49	3,09 13,00	97,38 5,29	1,73 12,42

* Valores maiores que 100%.

Nesta tabela pode-se observar que os ajustes com $\mu_2 > 0,5$ apresentam valores menores de *gap3*. Isso evidência a importância do pseudo resultado na qualidade da solução da heurística, pois quanto maior for μ_2 maior é a sua influência nos termos proximais usados na metodologia.

Além disso, existem valores de *gap3* altos, superiores a 100%, pois os ajustes que são ideais para determinados cenários ou condições iniciais são muito ruins para outros cenários, prejudicando a média. Em outras palavras, para esses ajustes (*gap3* > 100%) o resultado é sensível aos valores dos parâmetros escolhidos, sendo bom para determinada condição e ruim para as demais. Por sua vez, valores baixos de *gap3* significam pouca variação no desempenho do método com relação ao cenário escolhido. Do ponto de vista prático, não seria necessário determinar os ajustes para a resolução do problema para diferentes dias, ou seja, definem-se os parâmetros para um determinado tipo de sistema e estes são usados para a programação dos demais dias.

Para avaliar os diferentes ajustes da heurística utilizam-se também as curvas de perfil de desempenho, comparando o custo de operação encontrado (ou o limite superior). Nesse caso, quanto menor for o valor obtido pelo ajuste melhor.

O perfil de desempenho para cada conjunto de parâmetros é apresentado na Figura 42, sendo que diferentemente dos gráficos anteriores, utiliza-se um gráfico de barras, devido ao elevado número de ajustes a serem representados. Nesse caso, definem-se cinco níveis do fator de multiplicação, fm , cada um sendo representado por uma cor de barra diferente. Adicionalmente, a média da probabilidade dos cinco níveis é apresentada pela linha pontilhada.

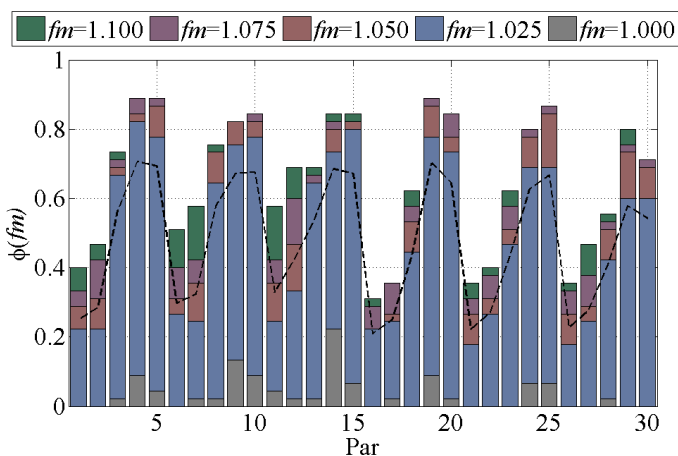


Figura 42: Perfil de desempenho dos ajustes da RP – casos determinísticos.

De acordo com a abordagem de perfil de desempenho, os melhores ajustes seriam com probabilidade alta para $fm = 1$ e com valores de probabilidade igual a 1 para valores baixos do fator de multiplicação, garantindo a robustez do método. Além disso, um determinado valor de fm pode ser interpretado como o nível de tolerância admitido no custo de operação. Por exemplo, o valor de $fm = 1,1$ é interpretado como uma tolerância de 10% no custo de operação, ou seja, admitem-se como ótimos os valores de até 110% do menor custo obtido. Para o ajuste Par29 com $fm = 1,1$ a probabilidade é de 0,8, ou seja, em 80% dos casos o par29 garante um custo de operação menor ou igual a 110% do *MLS* (melhor limite superior). Nesse experimento, além do valor de 10%, observam-se também as tolerâncias de 2,5%, 5,0% e 7,5%.

Assim, busca-se analisar para cada nível de tolerância qual dos ajustes tem o melhor desempenho, ou seja, apresenta a maior probabilidade acumulada. Os ajustes Par9 e Par14 apresentam o melhor desempenho com relação ao valor do LS para $fm = 1,0$. Por sua vez, caso admita-se uma tolerância de 2,5%, os melhores ajustes são o Par4, Par15 e Par19. Os melhores ajustes para o nível de 1,05 são os ajustes Par5, Par19 e Par25.

Adicionalmente, na Figura 42 é ilustrada a média de probabilidade acumulada dos 5 níveis. Observa-se que a mesma apresenta um comportamento repetitivo para determinados valores do parâmetro μ_2 , sendo melhor nos casos em que ele é maior a 0,5, fato também evidenciado na Tabela 14.

Por fim, os ajustes que garantem o melhor (menor) valor do custo de operação são apresentados nas Tabela 15. Na nomenclatura de cada caso, a primeira letra representa o sistema teste (A, B, C, D ou E), a segunda letra a condição inicial dos reservatórios (‘a’ para alto, ‘m’ para médio e ‘b’ para baixo) o número seguinte representa a quantidade de cenários da árvore (igual a 1 para todos os casos determinísticos) seguido da identificação do cenário (1, 2 ou 3).

Tabela 15: Melhores ajustes da heurística para os casos determinísticos.

Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par
Aa1,1	7	Ba1,1	9	Ca1,1	9	Da1,1	25	Ea1,1	14
Aa1,2	25	Ba1,2	4	Ca1,2	15	Da1,2	19	Ea1,2	15
Aa1,3	12	Ba1,3	24	Ca1,3	14	Da1,3	4	Ea1,3	14
Am1,1	10	Bm1,1	5	Cm1,1	14	Dm1,1	8	Em1,1	10
Am1,2	9	Bm1,2	9	Cm1,2	13	Dm1,2	9	Em1,2	14
Am1,3	9	Bm1,3	4	Cm1,3	19	Dm1,3	25	Em1,3	14
Ab1,1	11	Bb1,1	14	Cb1,1	19	Db1,1	10	Eb1,1	3
Ab1,2	11	Bb1,2	19	Cb1,2	28	Db1,2	24	Eb1,2	14
Ab1,3	17	Bb1,3	20	Cb1,3	14	Db1,3	4	Eb1,3	14

5.3.1.2 Casos estocásticos

Nos casos estocásticos são avaliados 10 ajustes de parâmetros da heurística, definidos com base nos ajustes que apresentaram melhor desempenho no caso determinístico. Os ajustes selecionados, de acordo com os resultados para os cinco níveis de tolerância apresentados na Figura 42, são: Par4, Par5, Par9, Par10, Par14, Par15, Par19, Par20, Par24 e Par25.

Nos estudos do problema estocástico são utilizados quatro tamanhos de árvores de cenários (com 4, 9, 16 e 25 cenários) e três condições de volume inicial para os cinco sistemas teste, resultando em 60 casos. Assim, cada um desses 60 casos é resolvido para os 10 ajustes de parâmetros da heurística. Os resultados da estratégia SpcDec3 para cada tipo de sistema teste são apresentados na Tabela 16, cujas colunas são a média do *gap3* e a média do tempo de processamento para as quatro árvores de cenários.

Tabela 16: Resultados dos ajustes da heurística para a estratégia SpcDec3 nos casos estocásticos.

Ajuste	A		B		C		D		E	
	<i>Gap3</i>	Tem.	<i>Gap3</i>	Tem.	<i>Gap3</i>	Tem.	<i>Gap3</i>	Tem.	<i>Gap3</i>	Tem.
Par4	0,85	39,96	23,28	34,20	2,31	39,33	72,67	36,04	*	39,79
Par5	1,03	39,67	28,44	33,52	6,89	38,49	70,89	36,38	25,11	40,16
Par9	0,55	39,54	19,52	32,29	3,44	37,38	79,69	37,92	*	40,00
Par10	0,84	39,89	14,78	33,59	6,68	38,17	78,81	38,08	23,97	39,22
Par14	0,46	40,17	18,09	33,10	3,93	38,05	*	36,79	*	40,48
Par15	0,23	39,76	14,56	34,14	4,13	39,59	99,34	38,46	27,82	38,46
Par19	0,63	39,89	33,18	32,74	17,99	38,28	20,03	36,37	*	39,57
Par20	0,91	39,65	22,96	33,26	11,86	37,64	52,96	36,58	*	39,87
Par24	0,73	39,62	5,05	33,29	37,40	37,92	55,17	37,05	*	40,12
Par25	1,00	40,20	15,87	33,80	32,62	38,45	61,73	36,84	*	40,26

* Valores maiores que 100%.

Note que em alguns caso o tempo de processamento é ligeiramente superior ao tempo limite de 40 minutos, pois o algoritmo implementado só interrompe o processo iterativo nas iterações do método de Feixes, não sendo possível pará-lo durante a resolução dos subproblemas da RL ou da heurística. Assim, considera-se uma tolerância no tempo limite, de 10% ou 4 minutos. Nos casos que extrapolam essa tolerância, usa-se a última solução da heurística antes dos 44 minutos. Na maioria das vezes isso ocasiona tempos menores que o limite, porém prejudica um pouco a qualidade da solução. Além disso, nos casos que convergiram com somente uma iteração para a heurística em um tempo acima de 44 minutos são considerados sem solução primal viável, resultando apenas em limite inferior. Essa observação também é válida para a estratégia de decomposição por cenários, ScnDec, cujos resultados são apresentados na Tabela 17.

Tabela 17: Resultados dos ajustes da heurística para a estratégia ScnDec nos casos estocásticos.

Ajuste	A		B		C		D		E	
	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.	Gap3	Tem.
Par4	*	41,06	3,31	40,64	76,47	40,20	*	41,02	*	40,79
Par5	*	41,43	2,66	40,33	75,18	40,93	*	40,85	*	40,65
Par9	*	41,05	6,42	40,46	69,33	40,25	*	40,08	*	41,44
Par10	*	40,90	6,13	40,58	70,62	40,13	*	40,18	*	39,52
Par14	*	40,97	28,57	40,83	83,32	40,25	*	41,34	*	39,79
Par15	*	40,96	28,68	40,44	80,21	40,13	*	41,58	*	39,80
Par19	0,87	40,74	0,93	40,67	7,97	40,97	*	40,68	*	41,09
Par20	1,57	41,11	0,54	40,49	22,32	40,21	*	40,71	*	40,30
Par24	0,68	40,99	5,02	40,39	11,91	40,87	*	39,65	*	42,05
Par25	1,17	41,25	3,32	40,46	9,73	41,21	*	39,65	*	41,33

* Valores maiores que 100%.

Na Tabela 17 é possível observar que na média os valores de *gap3* para os sistemas D e E são todos superiores a 100%, pois alguns ajustes resultam em valores de *gap* muito altos, devido ao elevado valor do custo de déficit e consequentemente a penalidade da violação do volume meta (dado pela variável *vfol*) desses sistemas. Isso causa uma maior variabilidade nos valores dos *gaps*, com maior amplitude das brechas.

Na prática, para resolver o problema para diferentes dias da semana seria necessário definir um ajuste para cada tamanho de árvore. Exceto para alguns casos, os valores de *gap3* são muito altos. Nesse caso, o ideal é usar um ajuste de parâmetros para cada tamanho de árvore de cenários. Isso também acontece na SpcDec3, Tabela 16, porém em um número menor de casos.

Semelhante aos casos determinísticos, para avaliar os diferentes ajustes da heurística utilizam-se também as curvas de perfil de desempenho, comparando o custo esperado de operação encontrado (ou o limite superior). Nesse caso, quanto menor for o valor obtido pelo ajuste melhor. O perfil de desempenho para cada ajuste de parâmetros é apresentado na Figura 43 para a SpcDec3 e na Figura 44 para a ScnDec.

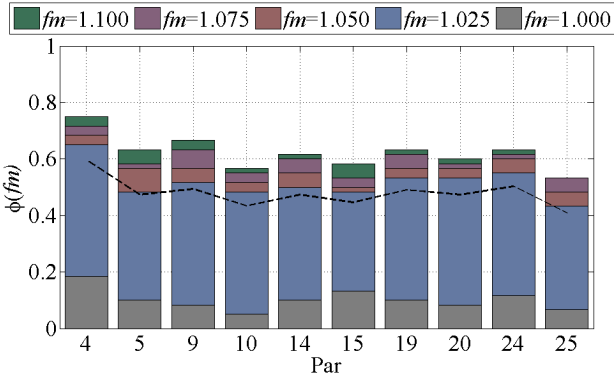


Figura 43: Perfil de desempenho dos ajustes da RP para a estratégia SpcDec3 – casos estocásticos.

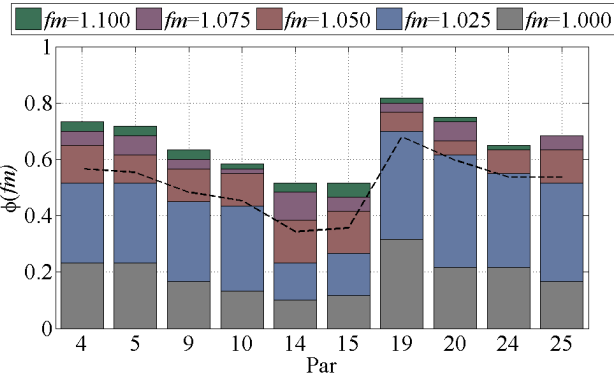


Figura 44: Perfil de desempenho dos ajustes da RP para a estratégia ScnDec – casos estocásticos.

De acordo com a Figura 43, o melhor ajuste para a estratégia SpcDec3 é o Par4, tendo a maior probabilidade acumulada para $fm = 1$ e sendo a configuração mais robusta com uma tolerância de até 10%. Os demais ajustes apresentam desempenho semelhante. Já no caso da estratégia ScnDec, o melhor ajuste é o Par19 seguido do Par20.

Por fim, os ajustes que garantem o melhor (menor) valor do custo esperado de operação são apresentados na Tabela 18 e Tabela 19, para as estratégias SpcDec3 e ScnDec, respectivamente. Na nomenclatura de cada caso, a primeira letra representa o sistema teste (A, B, C, D ou E), a segunda letra a condição inicial dos reservatórios (‘a’ para alto, ‘m’ para médio e ‘b’ para baixo), o número seguinte representa o tamanho da árvore de cenários (4, 9, 16 ou 25 cenários).

Tabela 18: Melhores ajustes da heurística para a SpcDec3 - casos estocásticos.

Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par
Aa4	4	Ba4	10	Ca4	15	Da4	20	Ea4	15
Aa9	9	Ba9	4	Ca9	14	Da9	19	Ea9	20
Aa16	9	Ba16	24	Ca16	5	Da16	24	Ea16	20
Aa25	19	Ba25	24	Ca25	5	Da25	19	Ea25	9
Am4	15	Bm4	5	Cm4	14	Dm4	4	Em4	14
Am9	4	Bm9	4	Cm9	15	Dm9	4	Em9	20
Am16	10	Bm16	15	Cm16	14	Dm16	24	Em16	25
Am25	5	Bm25	25	Cm25	14	Dm25	24	Em25	9
Ab4	25	Bb4	4	Cb4	4	Db4	19	Eb4	10
Ab9	24	Bb9	5	Cb9	4	Db9	20	Eb9	4
Ab16	15	Bb16	9	Cb16	4	Db16	19	Eb16	5
Ab25	15	Bb25	14	Cb25	4	Db25	19	Eb25	15

Tabela 19: Melhores ajustes da heurística para a ScnDec - casos estocásticos.

Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par	Caso	Par
Aa4	4	Ba4	5	Ca4	4	Da4	5	Ea4	20
Aa9	9	Ba9	25	Ca9	5	Da9	5	Ea9	15
Aa16	19	Ba16	25	Ca16	10	Da16	4	Ea16	19
Aa25	19	Ba25	20	Ca25	19	Da25	4	Ea25	4
Am4	4	Bm4	25	Cm4	19	Dm4	20	Em4	4
Am9	9	Bm9	24	Cm9	20	Dm9	19	Em9	5
Am16	24	Bm16	20	Cm16	19	Dm16	4	Em16	24
Am25	19	Bm25	24	Cm25	19	Dm25	24	Em25	4
Ab4	10	Bb4	20	Cb4	20	Db4	19	Eb4	4
Ab9	25	Bb9	5	Cb9	4	Db9	19	Eb9	4
Ab16	9	Bb16	19	Cb16	9	Db16	5	Eb16	24
Ab25	24	Bb25	19	Cb25	4	Db25	5	Eb25	4

A seguir são apresentados os resultados para os casos determinísticos e estocásticos, considerando somente as soluções dos melhores ajustes, conforme Tabela 15, Tabela 18 e Tabela 19.

5.3.2 Resultados dos casos determinísticos

Para os casos determinísticos é avaliado o desempenho da estratégia SpcDec3, comparando com a solução obtida por meio do pacote de otimização Gurobi. Os casos avaliados são os mesmos utilizados na seção de definição do melhor ajuste, 5.3.1.1, com três cenários diferentes, três condições de volumes iniciais e aplicados para os cinco sistemas, resultando em 45 casos.

A solução do Gurobi para esses casos é apresentada na Tabela 20, cujas colunas apresentam os valores do *LI* e *LS*, em R\$, o tempo de processamento, em minutos, e o valor da diferença relativa entre o *LS* e o *MLS*, dado pela seguinte expressão:

$$gap4 = \frac{LS - MLS}{MLS},$$

(111)

em que:

MLS é o melhor limite superior, dado pela melhor solução primal obtida dentre as estratégias de solução testadas.

Como são avaliadas as soluções de duas estratégias de solução, o *MLS* é dado pelo menor valor entre o *LS* do Gurobi e da decomposição SpcDec3.

Tabela 20: Solução do Gurobi para os casos determinísticos.

Caso	LI x10 ⁸	LS x10 ⁸	Gap4 (%)	Temp. (min.)	Caso	LI x10 ⁶	LS x10 ⁶	Gap4 (%)	Temp. (min.)
Aa1,1	1,074	1,074	0,0	2,2	Ba1,1	1,674	1,765	0,0	20,0
Aa1,2	1,045	1,045	0,0	3,5	Ba1,2	0,008	0,036	0,0	20,0
Aa1,3	1,080	1,080	0,0	1,6	Ba1,3	1,068	1,158	0,0	20,0
Am1,1	1,102	1,102	0,0	3,4	Bm1,1	4,738	4,907	0,5	20,0
Am1,2	1,072	1,072	0,0	1,9	Bm1,2	2,476	2,575	0,0	20,0
Am1,3	1,107	1,107	0,0	2,2	Bm1,3	3,930	4,078	0,0	20,0
Ab1,1	1,227	1,229	0,0	20,0	Bb1,1	13,787	14,030	0,1	20,0
Ab1,2	1,162	1,163	0,0	20,0	Bb1,2	10,301	10,530	0,7	20,0
Ab1,3	1,301	1,304	0,0	20,0	Bb1,3	12,641	12,858	0,0	20,0
Ca1,1	0,116	0,116	0,0	2,5	Da1,1	0,312	0,361	0,0	20,0
Ca1,2	0,106	0,106	0,0	0,4	Da1,2	0,337	0,378	0,0	20,0
Ca1,3	0,115	0,115	0,0	1,2	Da1,3	0,027	0,027	0,0	10,5
Cm1,1	0,404	0,410	0,0	20,0	Dm1,1	1,123	1,167	0,0	20,0
Cm1,2	0,383	0,387	0,0	20,0	Dm1,2	1,137	1,181	0,0	20,0
Cm1,3	0,489	0,495	0,0	20,0	Dm1,3	0,545	0,593	0,0	20,0
Cb1,1	0,904	0,911	0,0	20,0	Db1,1	3,122	3,472	0,0	20,0
Cb1,2	0,883	0,888	0,0	20,0	Db1,2	2,993	3,327	0,0	20,0
Cb1,3	1,001	1,006	0,0	20,0	Db1,3	1,477	1,540	0,0	20,0
Ea1,1	0,297	0,298	0,0	20,0					
Ea1,2	0,268	0,270	0,0	20,0					
Ea1,3	0,312	0,314	0,0	20,0					
Em1,1	0,366	0,368	0,0	20,0					
Em1,2	0,334	0,336	0,0	20,0					
Em1,3	0,382	0,384	0,0	20,0					
Eb1,1	0,436	0,438	0,0	20,0					

Eb1,2	0,403	0,405	0,0	20,0					
Eb1,3	0,454	0,455	0,0	20,0					

A Tabela 21 apresenta a solução da estratégia SpcDec3 considerando somente o melhor ajuste de parâmetros da heurística para cada caso (conforme Tabela 15).

Tabela 21: Solução da SpcDec3 para os casos determinísticos.

Caso	LI x10 ⁸	LS x10 ⁸	Gap4 (%)	Temp. (min.)	Caso	LI x10 ⁶	LS x10 ⁶	Gap4 (%)	Temp. (min.)
Aa1,1	1,071	1,079	0,5	17,4	Ba1,1	1,665	1,809	2,5	4,8
Aa1,2	1,042	1,048	0,2	20,0	Ba1,2	0,000	0,079	118,2	20,0
Aa1,3	1,077	1,082	0,1	20,0	Ba1,3	1,069	1,205	4,1	2,7
Am1,1	1,100	1,104	0,1	18,6	Bm1,1	4,732	4,885	0,0	3,6
Am1,2	1,069	1,073	0,1	20,0	Bm1,2	2,463	2,635	2,3	3,4
Am1,3	1,105	1,108	0,1	20,0	Bm1,3	3,949	4,085	0,2	2,9
Ab1,1	1,225	1,232	0,3	11,1	Bb1,1	13,725	14,015	0,0	0,8
Ab1,2	1,160	1,166	0,2	11,4	Bb1,2	10,259	10,458	0,0	0,6
Ab1,3	1,299	1,310	0,5	18,0	Bb1,3	12,613	12,891	0,3	0,6
Ca1,1	0,110	0,118	2,0	9,1	Da1,1	0,317	0,513	42,3	7,5
Ca1,2	0,101	0,106	0,8	12,7	Da1,2	0,328	0,483	27,7	1,9
Ca1,3	0,109	0,120	3,8	16,4	Da1,3	0,001	0,027	0,0	0,9
Cm1,1	0,404	0,414	0,8	20,0	Dm1,1	1,116	1,235	5,9	3,9
Cm1,2	0,381	0,390	0,9	15,8	Dm1,2	1,124	1,311	11,0	4,6
Cm1,3	0,490	0,501	1,0	7,3	Dm1,3	0,524	0,721	21,6	2,2
Cb1,1	0,905	0,920	1,0	9,6	Db1,1	3,191	4,019	15,8	5,2
Cb1,2	0,882	0,896	0,9	20,0	Db1,2	3,033	3,821	14,9	5,6
Cb1,3	0,999	1,013	0,7	20,0	Db1,3	1,461	1,646	6,9	1,8
Ea1,1	0,296	0,303	1,7	10,3					
Ea1,2	0,267	0,271	0,7	11,0					
Ea1,3	0,312	0,319	1,6	10,1					
Em1,1	0,366	0,370	0,7	15,9					
Em1,2	0,334	0,340	1,1	8,4					
Em1,3	0,382	0,387	0,8	7,6					
Eb1,1	0,436	0,442	0,9	8,2					
Eb1,2	0,403	0,407	0,6	20,0					
Eb1,3	0,453	0,459	0,8	20,0					

Nota-se nas tabelas que o pacote de otimização Gurobi, em geral, apresenta os melhores valores de *LS*. No entanto, nos casos Bm1,1, Bb1,1, Bb1,2 e Da1,3, o *MLS* é obtido através da estratégia SpcDec3 em um tempo de processamento em média 19 vezes inferior ao Gurobi. Isso mostra que mesmo para casos determinísticos a decomposição é competitiva, apresentando valores razoáveis de limite superior e na maior

parte dos casos tempos de processamento inferiores ao Gurobi. Essa vantagem pode ser ainda mais acentuada com o aumento da dimensão do problema, dado pelo aumento do porte do sistema (com maior número de usinas, barras e linhas) ou pela consideração de incertezas no problema.

A comparação entre o Gurobi e a estratégia SpcDec3 também é feita por meio das curvas de perfil de desempenho, considerando como métricas o tempo de processamento e o custo de operação obtido. O perfil de desempenho é traçado nos 45 casos, executados com cada uma das estratégias. Na Figura 45 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao tempo de processamento.

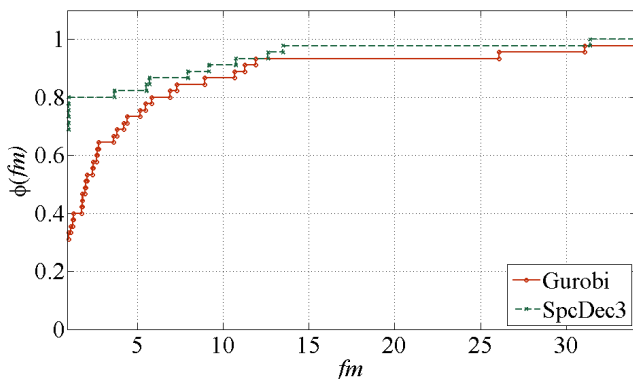


Figura 45: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RP – casos determinísticos.

Por sua vez, a Figura 46 ilustra o desempenho medido em termos da solução fornecida por cada estratégia.

Por fim, a título de ilustração apresentam-se gráficos do processo iterativo de alguns casos, representando a evolução no tempo do *LI* e *LS* para ambas as estratégias. A convergência dos casos Am1,1, Bm1,1, Cm1,1, Dm1,1 e Em1,1 é ilustrada nas Figura 47, Figura 48, Figura 49, Figura 50 e Figura 51, respectivamente.

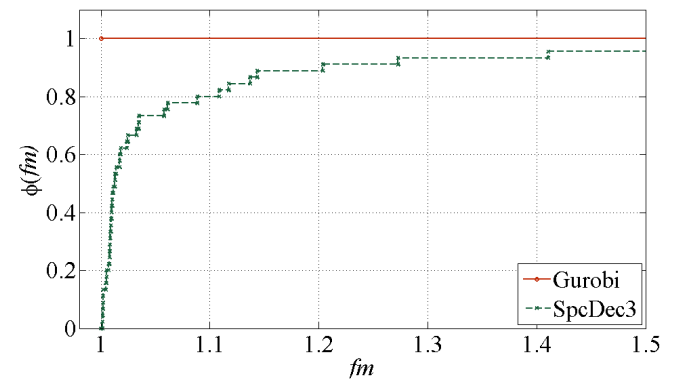


Figura 46: Perfil de desempenho (custo de operação) da RP – casos determinísticos.

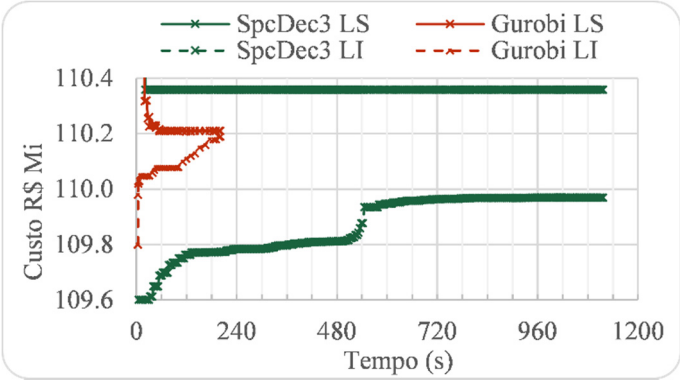


Figura 47: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Am1,1.

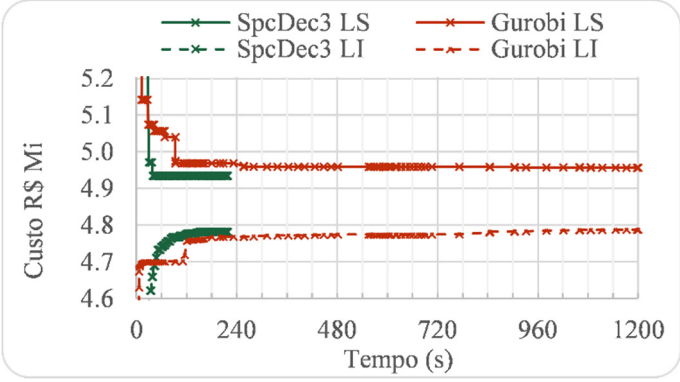


Figura 48: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Bm1,1.

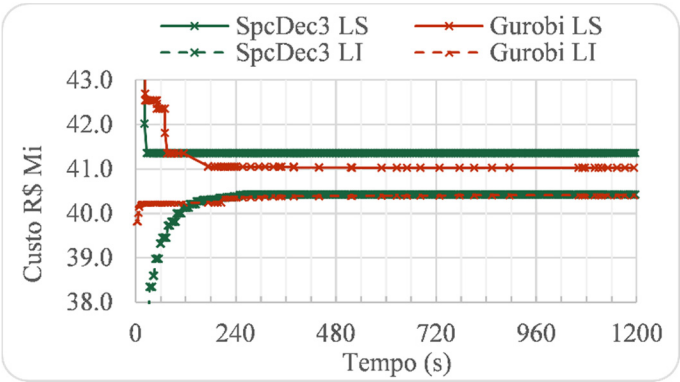


Figura 49: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Cm1,1.

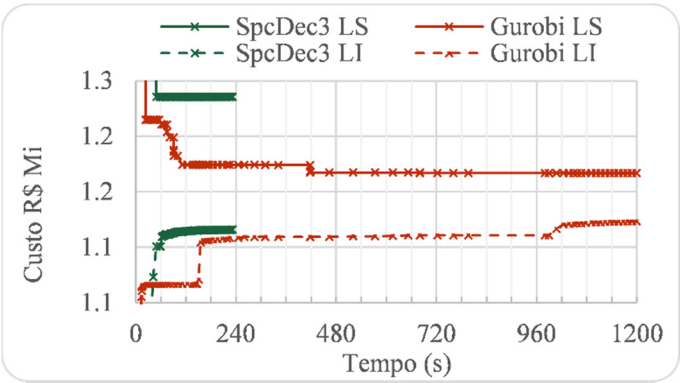


Figura 50: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Dm1,1.

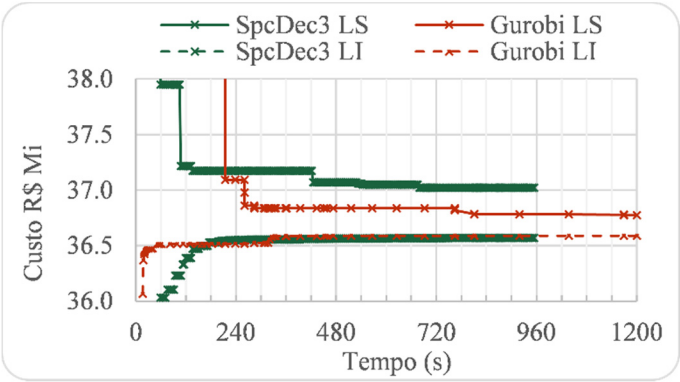


Figura 51: Processo iterativo da SpcDec3 e Gurobi para o caso Em1,1.

Nos gráficos é possível observar que em alguns casos a SpcDec3 é mais vantajosa que o Gurobi. Por exemplo, no caso Bm1,1 a decomposição garante um LS menor e com menos tempo de processamento. Já nos casos Cm1,1 e Em1,1, apesar do valor final do LS com o Gurobi ser menor, se os algoritmos fossem parados com cerca de 60 e 180 segundos, respectivamente, a SpcDec3 apresentaria um valor menor de LS, ou seja, ela atinge valores razoáveis de LS em um tempo de processamento menor.

Em resumo, na Tabela 22, apresentam-se a média e o desvio padrão do *gap4* e dos tempos computacionais para todos os casos determinísticos. Para o caso de problemas de PLIM, o Gurobi não contabiliza o processo iterativo em número de iterações, e sim em nós visitados; assim, apresenta-se para essa estratégia apenas o tempo de processamento. Para a decomposição apresentam-se o tempo de processamento gasto na resolução dos subproblemas e na heurística (relativos ao tempo total), assim como o número total de iterações.

Tabela 22: Comparação das estratégias com RL e RP casos determinísticos.

Estratégia	Métrica	Gap4 (%)	Tempo (min)	Tempo Subp. (%)	Tempo RP. (%)	N. de iter.
Gurobi	Média	0,03	16,2	-	-	-
	Desv.Pad.	0,12	7,3	-	-	-
SpcDec3	Média	6,59	10,5	27,66	39,39	186,1
	Desv.Pad.	18,94	7,1	10,01	6,27	142,8

5.3.3 Resultados dos casos estocásticos

Para os casos estocásticos avaliam-se os desempenhos das estratégias de decomposição SpcDec3 e ScnDec e o resultado do ED resolvido por meio do pacote de otimização Gurobi. Os casos avaliados são os mesmos utilizados na seção 5.3.1.2, com quatro tamanhos de árvore de cenários diferentes (com 4, 9, 16 e 25 cenários), três condições de volumes iniciais para os cinco sistemas, resultando em 60 casos.

Na Tabela 23, Tabela 24 e Tabela 25 são apresentados os resultados do Gurobi, SpcDec3 e ScnDec, respectivamente. Para cada caso são apresentados o limite inferior e superior, o tempo de processamento e o valor do *gap4* (conforme equação (111)), cujo valor em verde indica que aquela estratégia gera a melhor solução (limite superior) para o caso. Como nos casos determinísticos, utiliza-se aqui

somente a melhor solução encontrada para os diferentes ajustes da heurística.

Tabela 23: Solução do Gurobi para os casos estocásticos.

Caso	LI x10 ⁸	LS x10 ⁸	Gap4 (%)	Temp. (min.)	Caso	LI x10 ⁶	LS x10 ⁶	Gap4 (%)	Temp. (min.)
Aa4	1,075	1,076	0,0	40,0	Ba4	2,434	2,566	0,0	40,0
Aa9	1,105	1,112	0,0	40,0	Ba9	2,111	2,355	1,1	40,0
Aa16	1,087	6,427	484,7	40,0	Ba16	2,069	10,56	330,2	40,0
Aa25	1,082	6,699	506,8	40,0	Ba25	1,696	68,30	3.022,5	40,0
Am4	1,102	1,103	0,0	40,0	Bm4	5,746	5,953	0,4	40,0
Am9	1,128	1,134	0,0	40,1	Bm9	5,189	5,593	1,9	40,0
Am16	1,109	1,188	6,1	40,0	Bm16	5,134	63,51	1.028,2	40,0
Am25	1,102	1,214	8,0	40,0	Bm25	4,557	105,57	1.942,2	40,0
Ab4	1,246	1,250	0,0	40,0	Bb4	18,121	18,925	0,0	40,0
Ab9	1,261	1,276	0,0	40,0	Bb9	17,149	18,029	0,0	40,0
Ab16	1,249	1,264	0,0	40,0	Bb16	16,219	18,32	2,5	40,0
Ab25	1,231	1,322	3,5	40,0	Bb25	14,967	155,19	834,3	40,0
Ca4	0,102	0,103	0,0	40,0	Da4	0,209	0,333	0,0	40,0
Ca9	0,123	0,130	0,0	40,0	Da9	0,203	32,901	4.360,8	40,0
Ca16	0,112	0,134	12,1	40,0	Da16	0,179	148,63	6.171,4	40,0
Ca25	0,122	9,725	7.008,9	40,2	Da25	0,069	2754,2	*	40,0
Cm4	0,377	0,386	0,1	40,0	Dm4	0,963	1,061	0,0	40,0
Cm9	0,392	1,853	359,2	40,1	Dm9	0,890	21,97	1.658,0	40,0
Cm16	0,387	0,713	72,6	40,0	Dm16	0,773	2577,2	*	40,0
Cm25	0,383	1,129	163,9	40,0	Dm25	0,606	1645,9	5.829,1	40,0
Cb4	0,872	0,881	0,0	40,1	Db4	2,405	2,768	0,0	40,0
Cb9	0,887	12,50	1.277,3	40,0	Db9	2,364	8,979	146,8	40,0
Cb16	0,882	25,65	2.703,5	40,0	Db16	1,953	245,1	6.715,9	40,0
Cb25	0,870	68,65	2.140,0	40,0	Db25	1,586	3091,1	*	40,0
Ea4	0,293	0,297	0,0	40,0					
Ea9	0,290	78,84	*	40,0					
Ea16	0,274	**	*	40,0					
Ea25	0,000	**	*	40,0					
Em4	0,362	0,398	7,3	40,0					
Em9	0,359	34,22	8.791,1	40,0					
Em16	0,341	**	*	40,0					
Em25	0,342	**	*	40,0					
Eb4	0,434	0,437	0,0	40,0					
Eb9	0,431	102,6	*	40,0					
Eb16	0,418	**	*	40,2					
Eb25	0,412	10509	*	40,0					

* Valores maiores que 9999%.

** Nenhuma solução primal encontrada.

Tabela 24: Solução da SpcDec3 para os casos estocásticos.

Caso	LI x10 ⁸	LS x10 ⁸	Gap4 (%)	Temp. (min.)	Caso	LI x10 ⁶	LS x10 ⁶	Gap4 (%)	Temp. (min.)
Aa4	1,069	1,083	0,7	40,1	Ba4	2,451	2,631	2,5	16,4
Aa9	1,101	1,115	0,3	40,0	Ba9	2,148	2,330	0,0	40,0
Aa16	1,084	1,099	0,0	40,4	Ba16	0,995	3,253	32,5	40,1
Aa25	1,079	1,110	0,5	40,0	Ba25	0,144	8,080	269,4	43,4
Am4	1,097	1,111	0,7	40,1	Bm4	5,765	5,930	0,0	11,4
Am9	1,123	1,137	0,2	40,0	Bm9	5,296	5,486	0,0	40,3
Am16	1,103	1,120	0,0	40,2	Bm16	4,402	11,718	108,2	40,8
Am25	1,096	1,135	1,0	39,4	Bm25	2,437	19,258	272,5	40,0
Ab4	1,245	1,256	0,4	40,0	Bb4	18,147	19,275	1,9	7,6
Ab9	1,243	1,280	0,3	40,0	Bb9	17,210	18,284	1,4	40,0
Ab16	1,222	1,275	0,9	40,0	Bb16	13,272	19,776	10,7	40,5
Ab25	1,212	1,277	0,0	38,8	Bb25	8,119	28,070	69,0	33,5
Ca4	0,099	0,108	4,8	37,1	Da4	0,240	0,439	31,8	40,1
Ca9	0,118	0,138	6,6	40,3	Da9	0,159	0,738	0,0	41,0
Ca16	0,105	0,120	0,0	40,0	Da16	0,072	2,370	0,0	41,0
Ca25	0,116	0,137	0,0	41,9	Da25	0,001	18,901	0,0	30,8
Cm4	0,377	0,386	0,0	25,4	Dm4	1,010	1,189	12,1	22,6
Cm9	0,391	0,403	0,0	40,0	Dm9	0,877	1,250	0,0	40,4
Cm16	0,331	0,413	0,0	40,0	Dm16	0,385	3,661	130,3	40,9
Cm25	0,314	0,520	21,5	43,0	Dm25	0,133	27,760	0,0	43,6
Cb4	0,873	0,888	0,8	40,1	Db4	2,580	3,218	16,3	34,1
Cb9	0,879	0,907	0,0	40,0	Db9	1,893	3,639	0,0	40,0
Cb16	0,821	0,915	0,0	41,4	Db16	1,411	10,975	205,2	40,0
Cb25	0,731	3,065	0,0	40,0	Db25	0,832	29,223	0,0	37,5
Ea4	0,293	0,306	3,0	40,0					
Ea9	0,284	0,328	0,0	40,0					
Ea16	0,272	0,325	0,0	40,9					
Ea25	0,271	0,821	0,0	42,4					
Em4	0,363	0,371	0,0	40,2					
Em9	0,351	0,385	0,0	40,6					
Em16	0,331	0,510	0,0	42,2					
Em25	0,328	0,837	0,0	42,1					
Eb4	0,434	0,443	1,3	40,1					
Eb9	0,425	0,452	0,0	40,1					
Eb16	0,403	0,660	0,0	40,3					
Eb25	0,395	3,028	0,0	43,3					

Tabela 25: Solução da ScnDec para os casos estocásticos.

Caso	LI x10 ⁸	LS x10 ⁸	Gap4 (%)	Temp. (min.)	Caso	LI x10 ⁶	LS x10 ⁶	Gap4 (%)	Temp. (min.)
Aa4	1,072	1,081	0,5	41,0	Ba4	2,330	2,687	4,7	40,4
Aa9	1,103	1,117	0,4	40,4	Ba9	1,924	2,509	7,7	41,1
Aa16	1,086	1,106	0,6	40,8	Ba16	1,909	2,456	0,0	41,3
Aa25	1,081	1,104	0,0	39,2	Ba25	1,509	2,187	0,0	35,0
Am4	1,100	1,108	0,5	40,0	Bm4	5,577	5,968	0,6	40,2
Am9	1,125	1,141	0,6	41,3	Bm9	5,068	5,686	3,6	41,4
Am16	1,106	1,132	1,1	41,7	Bm16	5,044	5,629	0,0	40,8
Am25	1,100	1,124	0,0	40,0	Bm25	4,438	5,169	0,0	42,4
Ab4	1,245	1,254	0,3	40,3	Bb4	17,565	19,188	1,4	40,5
Ab9	1,255	1,279	0,2	41,2	Bb9	16,518	18,390	2,0	40,6
Ab16	1,244	1,272	0,6	41,7	Bb16	15,856	17,862	0,0	42,0
Ab25	1,231	1,307	2,4	41,0	Bb25	14,546	16,611	0,0	43,9
Ca4	0,100	0,119	16,0	40,2	Da4	0,216	0,984	195,2	40,0
Ca9	0,121	0,153	17,8	40,9	Da9	0,207	2,612	254,2	37,8
Ca16	0,112	0,152	26,6	42,0	Da16	0,182	**	*	44,0
Ca25	0,122	0,182	32,9	42,9	Da25	0,182	**	*	44,0
Cm4	0,375	0,389	0,7	40,6	Dm4	0,972	1,180	11,3	42,2
Cm9	0,392	0,408	1,2	42,9	Dm9	0,882	1,317	5,4	41,7
Cm16	0,385	0,420	1,7	39,7	Dm16	0,693	1,590	0,0	43,9
Cm25	0,381	0,428	0,0	42,1	Dm25	0,685	40,239	45,0	43,0
Cb4	0,870	0,918	4,2	41,7	Db4	2,432	3,346	20,9	41,5
Cb9	0,887	1,054	16,2	39,1	Db9	2,382	3,798	4,4	40,6
Cb16	0,883	13,44	1.368,8	33,5	Db16	1,955	3,596	0,0	43,9
Cb25	0,875	**	*	44,0	Db25	1,968	80,051	173,9	42,0
Ea4	0,290	0,439	48,0	39,0					
Ea9	0,294	0,564	71,9	38,4					
Ea16	0,289	0,808	148,8	41,7					
Ea25	0,289	**	*	44,0					
Em4	0,359	0,394	6,4	43,0					
Em9	0,361	0,634	64,6	42,1					
Em16	0,356	0,938	83,7	42,8					
Em25	0,357	**	*	44,0					
Eb4	0,430	0,536	22,7	39,2					
Eb9	0,431	1,255	177,3	38,9					
Eb16	0,426	49,20	7.353,0	38,6					
Eb25	0,427	**	*	44,0					

* Valores maiores que 9999%.

** Nenhuma solução primal encontrada.

Conforme visto na Seção 5.3.2, nos casos determinísticos o uso do Gurobi é melhor na maioria dos casos; no entanto, em problemas estocásticos o uso das decomposições se mostra bem mais vantajoso. A melhor solução primal é obtida com as estratégias de decomposição em 70% dos 60 casos. Em 51,7% dos casos a melhor solução é obtida pela SpcDec3 e em 18,3% dos casos a ScnDec gera os melhores resultados.

A comparação entre as decomposições (SpcDec3 e ScnDec) e o pacote de otimização Gurobi também é feita por meio das curvas de perfil de desempenho, considerando como métricas o tempo de processamento e o custo esperado de operação. O perfil de desempenho é traçado considerando 60 casos, executados com cada uma das estratégias. Na Figura 52 apresenta-se o desempenho das estratégias com relação ao tempo de processamento.

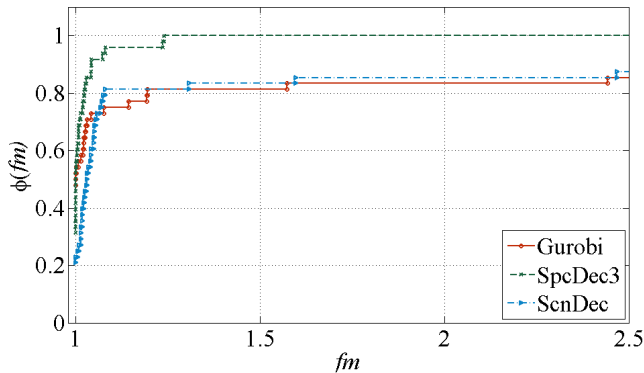


Figura 52: Perfil de desempenho (tempo de processamento) da RP – casos estocásticos.

Por sua vez, a Figura 53 ilustra o desempenho medido em termos da solução fornecida por cada estratégia.

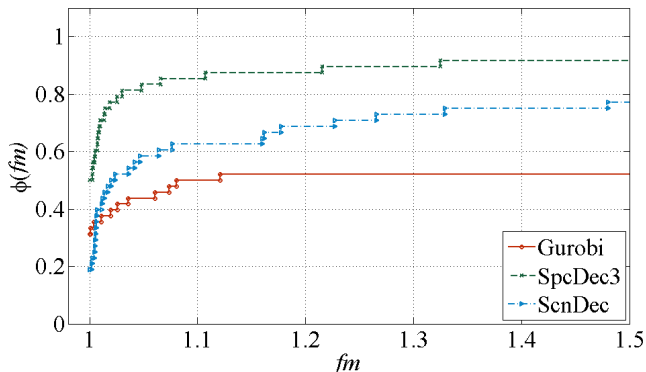


Figura 53: Perfil de desempenho (custo esperado de operação) da RP – casos estocásticos.

As curvas de perfil de desempenho evidenciam ainda mais as vantagens do uso das estratégias de decomposição. As decomposições apresentam uma maior probabilidade acumulada de casos com menores tempos de processamento e menores valores do custo esperado de operação. Dentre as duas estratégias de decomposição a SpcDec3 apresenta um desempenho superior na maioria dos casos. No entanto, em alguns casos a decomposição por cenários resulta em um custo esperado de operação ligeiramente inferior ao da SpcDec3, como pode ser observado nas ilustrações do processo iterativo a seguir.

A convergência dos casos Am25, Bm25, Cm25, Dm25 e Em25 é ilustrada nas Figura 54, Figura 55, Figura 56, Figura 57 e Figura 58, respectivamente. Dada a grande diferença de amplitude de algumas soluções utiliza-se o eixo dos custos em escala logarítmica (base 10).

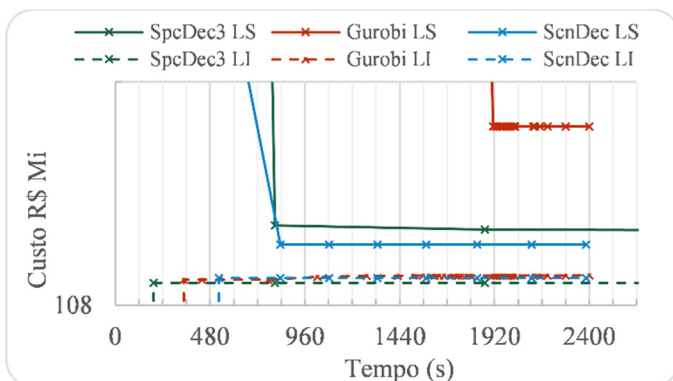


Figura 54: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Am25.

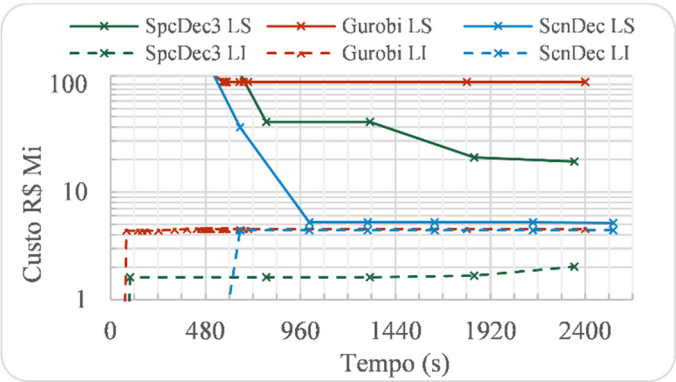


Figura 55: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Bm25.

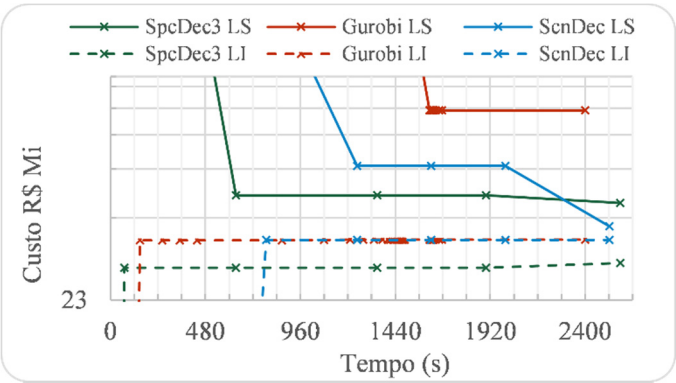


Figura 56: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Cm25.

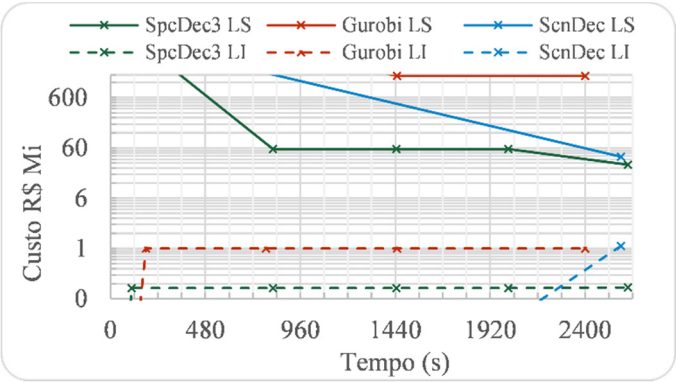


Figura 57: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Dm25.

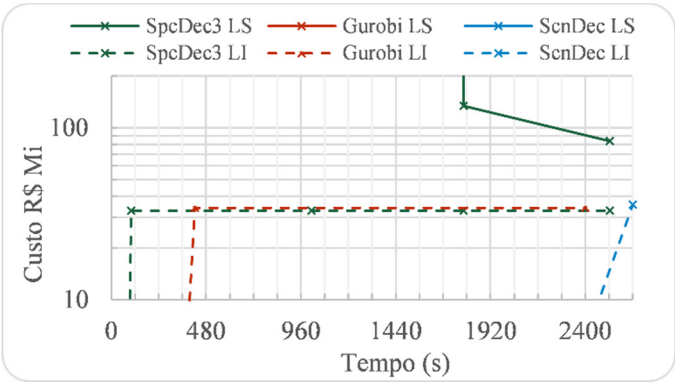


Figura 58: Processo iterativo da SpcDec3, ScnDec e Gurobi para o caso Em25.

Em resumo, na Tabela 25, apresentam-se a média e o desvio padrão da *gap4* e dos tempos computacionais para todos os casos. Os valores da tabela mostram novamente o desempenho superior da decomposição SpcDec3. Além disso, nota-se que para a decomposição por cenários grande parte do tempo de processamento total é utilizado na resolução dos subproblemas.

Tabela 26: Comparação das estratégias com RL e RP casos estocásticos.

Estratégia	Métrica	Gap4 (%)	Tempo (min)	Tempo Subp. (%)	Tempo RP. (%)	N. de iter.
Gurobi	Média	1.134,50	40,0	-	-	-
	Desv.Pad.	2.194,87	0,0	-	-	-
SpcDec3	Média	20,11	38,1	11,48	18,87	47,2
	Desv.Pad.	58,41	7,1	8,74	11,63	57,1
ScnDec	Média	188,89	41,1	94,23	5,39	13,2
	Desv.Pad.	1.011,49	2,1	4,36	4,07	14,2

Por fim, pode-se ainda analisar as estratégias de solução de acordo com o tamanho da árvore de cenários, ou seja, verificar o aumento da dificuldade de resolução de cada estratégia com o aumento do número de cenários. Para esta comparação avalia-se tanto a qualidade do limite superior quanto do limite inferior. Assim, utilizam-se como métricas o *gap4* e o *gap5*, definido como:

$$gap5 = \frac{MLI - LI}{MLI}, \tag{112}$$

em que:

MLI é o melhor limite inferior, dado pela melhor solução dual obtida dentre as estratégias de solução testadas.

Como são avaliadas as soluções de três estratégias de solução, o *MLI* é dado pelo maior valor entre o *LI* do Gurobi e das decomposições SpcDec3 e ScnDec.

Conforme observado na Tabela 23 e Tabela 25 o *gap4* pode assumir valores muito altos. Para facilitar a comparação, nesses casos utiliza-se o valor máximo de 999%, mesmo para casos sem solução primal. A comparação com relação ao limite superior dos métodos é apresentada na Figura 59.

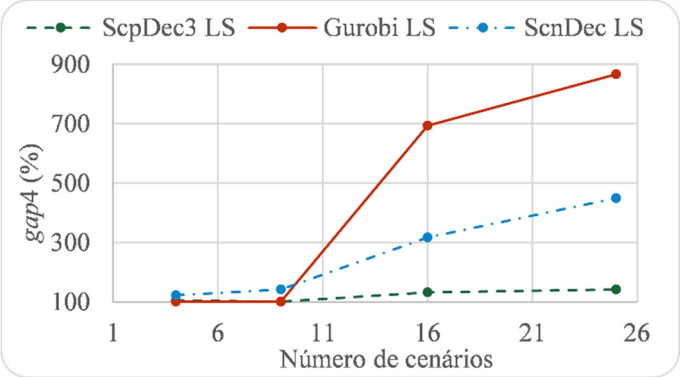


Figura 59: Média do *gap4* com relação ao número de cenários.

Por sua vez, comparação com relação ao limite inferior é apresentado na Figura 60.

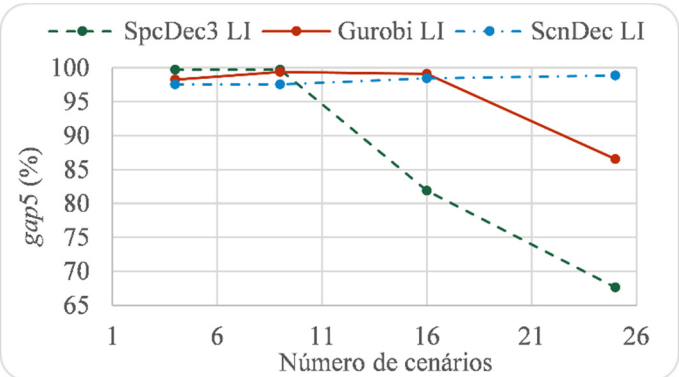


Figura 60: Média do *gap5* com relação ao número de cenários.

A estratégia SpcDec3 apresenta a menor variação de *gap4*, no entanto é a estratégia cujo limite inferior tem maior variação com o aumento do número de cenários. Por outro lado, a decomposição por

cenários é a estratégia que possui a menor variação do limite inferior com o aumento do número de cenários e uma variação razoável com relação ao LS.

5.3.4 Análise da característica do sistema e condições iniciais de armazenamento

Da mesma maneira que apresentado para os resultados da RL, analisam-se os resultados com relação ao tipo de sistema teste e a condição inicial de volume. O objetivo é verificar em quais condições tem-se maior dificuldade de resolução. Assim, para cada estratégia apresenta-se o tempo de processamento e a distância entre o limite superior e inferior obtido pelo método (*gap1*).

A Tabela 27 apresenta os resultados obtidos considerando os casos determinístico, e a Tabela 28 os casos estocásticos. Como métrica utiliza-se a diferença relativa entre o *LI* e *LS* obtidos em cada método, o *gap1* (conforme equação (110)), cujo valor máximo é limitado em 999% para a média não ser prejudicada por soluções com brechas muito grandes.

Tabela 27: Comparação por tipo de sistema - casos determinísticos.

Sist. teste	Métrica	SpcDec3		Gurobi	
		<i>Gap1</i> (%)	Tempo (min)	<i>Gap1</i> (%)	Tempo (min)
A	Média	0,5	17,4	0,0	8,3
	Desv.Pad.	0,2	3,6	0,1	8,8
B	Média	115,6	4,4	42,8	20,0
	Desv.Pad.	331,3	6,0	116,7	0,0
C	Média	3,9	14,6	0,6	13,8
	Desv.Pad.	3,1	5,1	0,6	9,3
D	Média	137,5	3,7	7,9	18,9
	Desv.Pad.	323,5	2,2	5,1	3,2
E	Média	1,6	12,4	0,5	20,0
	Desv.Pad.	0,5	5,0	0,1	0,0

Tabela 28: Comparação por tipo de sistema - casos estocásticos.

Sist. teste	Métrica	SpcDec3		Gurobi		ScnDec	
		Gap1 (%)	Tempo (min)	Gap1 (%)	Tempo (min)	Gap1 (%)	Tempo (min)
A	Média	2,3	39,9	86,6	40,0	2,0	40,7
	Desv.Pad.	1,4	0,4	195,6	0,0	1,4	0,8
B	Média	201,0	32,8	366,3	40,0	17,8	40,8
	Desv.Pad.	320,8	13,0	470,1	0,0	11,1	2,1
C	Média	40,8	39,1	389,8	40,0	181,7	40,8
	Desv.Pad.	89,3	4,5	462,5	0,1	382,0	2,7
D	Média	512,5	37,7	696,4	40,0	477,6	42,1
	Desv.Pad.	444,7	5,9	451,9	0,0	468,1	1,9
E	Média	100,2	41,0	750,2	40,0	398,6	41,3
	Desv.Pad.	189,9	1,1	450,1	0,0	447,0	2,3

Nota-se nos casos determinísticos (Tabela 28) que em geral os sistemas com maior participação de termelétricas na matriz apresentam valores de *LS* e *LI* mais próximos. No entanto, nos casos estocásticos, isso só pode ser verificado para o sistema teste A, que é o sistema com maior capacidade e número de usinas termelétricas.

Com relação à estratégia de solução dos casos estocásticos, a ScnDec apresenta, na média, menores valores de brecha para os sistemas A, B e D. Por sua vez, a estratégia SpcDec3 apresenta as menores médias de *gap1* para os sistemas teste C e E.

Adicionalmente, pode-se analisar os resultados de acordo com a condição inicial do problema. A Tabela 29 apresenta a média dos valores do *gap1*, em %, para os casos determinísticos, considerando as estratégias SpcDec3 e Gurobi. Por sua vez, a Tabela 30 apresenta os resultados estocásticos considerado as estratégias SpcDec3, ScnDec e Gurobi.

Tabela 29: Comparação por condição inicial – casos determinísticos.

Sistema teste	Volume inicial baixo		Volume inicial médio		Volume inicial alto	
	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.
A	0,4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,3
B	2,0	0,2	4,2	1,4	231,3	400,6
C	1,1	0,5	1,8	0,6	3,9	4,5
D	15,2	8,8	13,6	12,7	189,3	397,4
E	0,8	0,4	1,0	0,5	1,4	1,0

Tabela 30: Comparação por condição inicial – casos estocásticos.

Sistema teste	Volume inicial baixo		Volume inicial médio		Volume inicial alto	
	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.	Média	Desv.Pad.
A	2,9	2,4	2,7	3,0	127,2	196,2
B	109,5	269,3	243,3	403,4	193,2	378,1
C	446,3	495,6	64,9	112,3	144,4	283,0
D	438,9	451,2	509,7	488,0	801,0	395,5
E	495,9	479,1	372,9	465,4	540,0	461,5

Para os casos determinísticos observa-se que a diferença entre o *LS* e o *LI* é maior para condições iniciais de volume alto, principalmente nos sistemas que dependem mais da geração de hidrelétricas. Nos casos estocásticos (Tabela 30) os sistemas teste A, D e E apresentam maior valor de *gap1* para condições de volumes iniciais elevados, enquanto que nos sistemas B e C as maiores brechas são para volumes iniciais médios e baixos, respectivamente.

5.3.5 Análise da solução primal

Nesta seção busca-se comparar alguns valores primais obtidos nos casos estocásticos. Inicialmente, observa-se o custo esperado de operação para os casos com volumes iniciais médios e 25 cenários. A Figura 61 ilustra a diferença no custo total de cada solução obtida com três diferentes estratégias de resolução.

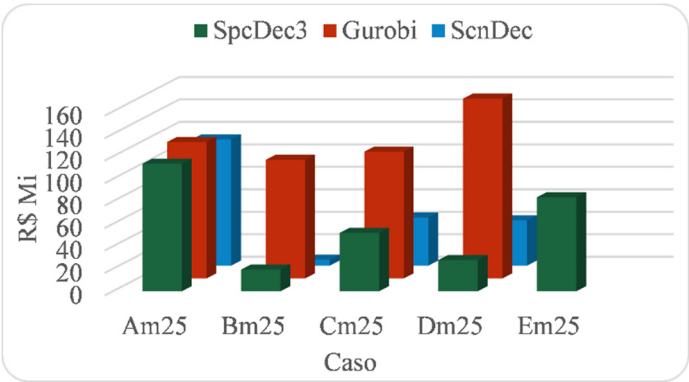


Figura 61: Comparação dos custos esperados de operação.

Para esses casos, desconsiderando o sistema teste E, em que somente a decomposição espacial encontra uma solução, a estratégia SpcDec3 apresenta um custo total de operação em média 89,3% mais

barato que o Gurobi. Por sua vez, a decomposição por cenários apresenta em média um custo 89,9% mais barato que o custo obtido por meio do Gurobi.

Considerando as três condições de volume inicial para os casos com 25 cenários (desconsiderando os casos que não convergiram), as estratégias de decomposição SpcDec3 e ScnDec apresentam em média custos 84,4% e 86,6%, respectivamente, mais baratos que o Gurobi.

Para árvores menores essa diferença é menos expressiva, sendo que em alguns casos o Gurobi apresenta o menor custo esperado de operação. A diferença relativa de custo esperado de operação com relação à solução do Gurobi, para cada sistema e tamanho de árvore de cenários, é apresentada na Tabela 31 para a estratégia SpcDec3 e na Tabela 32 para a ScnDec.

Tabela 31: Custo relativo da SpcDec3.

N. Cenários	A	B	C	D	E
4	0,6%	1,4%	0,8%	16,4%	-1,1%
9	0,3%	0,5%	-90,0%	-91,2%	-99,5%
16	-60,6%	-62,4%	-94,5%	-99,5%	-
25	-61,9%	-83,2%	-94,0%	-98,8%	-

Tabela 32: Custo relativo da ScnDec.

N. Cenários	A	B	C	D	E
4	0,4%	1,5%	4,1%	32,4%	21,1%
9	0,4%	2,3%	-88,8%	-87,9%	-98,9%
16	-60,5%	-71,9%	-47,1%	-99,8%	-
25	-61,7%	-92,7%	-94,4%	-97,5%	-

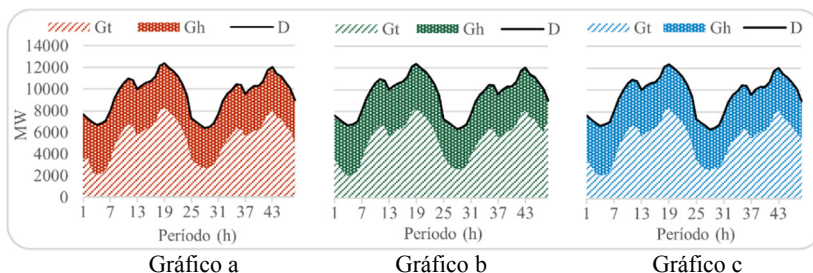
Os valores positivos significam que o custo esperado de operação obtido pela estratégia é mais caro que o resultado obtido no Gurobi. Por sua vez, um valor negativo significa quão mais barato, em média, é a solução obtida por meio da decomposição. Por exemplo, resolvendo o sistema teste A com 25 cenários por meio da SpcDec3 (ScnDec) resulta em um custo esperado 61,9% (61,7%) mais barato que o Gurobi.

A partir de 16 cenários, as estratégias de decomposição garantem soluções melhores (custo de operação menores) que a resolução do problema por meio do Equivalente Determinístico via Gurobi.

Além disso, pode-se também comparar os resultados primais por meio de curvas de geração térmica e hidro ao longo dos períodos, assim como a evolução do volume útil armazenado durante o horizonte de estudo.

A Por sua vez, a Figura 63 ilustra a evolução do volume útil total armazenado nas hidrelétricas, em %, e o valor do déficit, em MW, para cada período do horizonte de estudo.

Figura 62 ilustra, para as três estratégias, a curva de geração hidrelétrica, termelétrica e a demanda do sistema teste A (caso Am25). O gráfico “a” possui a solução por meio do ED resolvido no Gurobi e os gráficos “b” e “c” representam a solução por meio das estratégias SpcDec3 e ScnDec, respectivamente.



Por sua vez, a Figura 63 ilustra a evolução do volume útil total armazenado nas hidrelétricas, em %, e o valor do déficit, em MW, para cada período do horizonte de estudo.

Figura 62: Curva de geração e demanda - caso Am25.

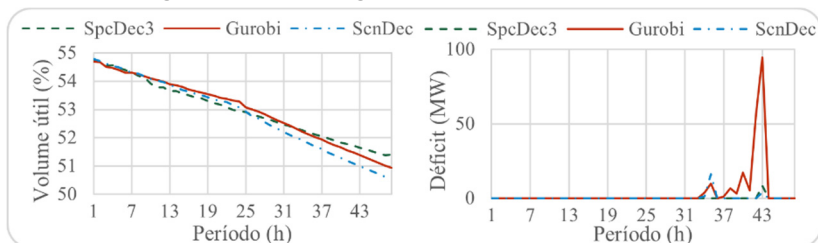


Figura 63: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Am25.

Tanto os valores de geração e demanda quanto de volume útil e déficit do período 25 ao 48 são dados pelo valor esperado de todos os cenários considerados.

Neste caso as estratégias de decomposição apresentam custo total de operação praticamente iguais (conforme pode-se observar na Figura 61 ou na Tabela 31 e Tabela 32). Contudo, a diferença para o Gurobi é grande, devido principalmente ao déficit ocorrido nos períodos de segundo estágio de alguns cenários (cujos valores não são perceptíveis na Por sua vez, a Figura 63 ilustra a evolução do volume útil total

armazenado nas hidrelétricas, em %, e o valor do déficit, em MW, para cada período do horizonte de estudo.

Figura 62, mas podem ser observados na Figura 63). Além disso, a curva de geração das termelétricas é ligeiramente diferente entre os métodos nos períodos iniciais e finais do horizonte.

As mesmas curvas são traçadas para o sistema teste B (caso Bm25), apresentadas na Figura 64 e Figura 65.

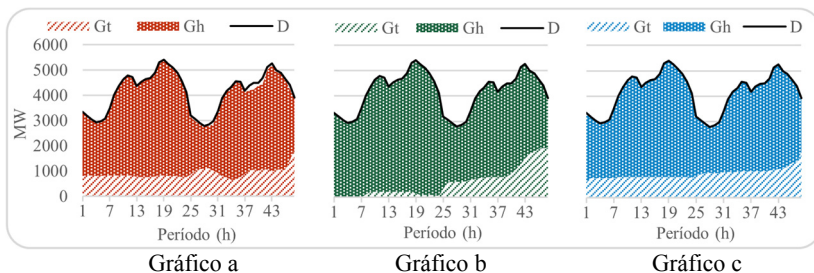


Figura 64: Curva de geração e demanda - caso Bm25.

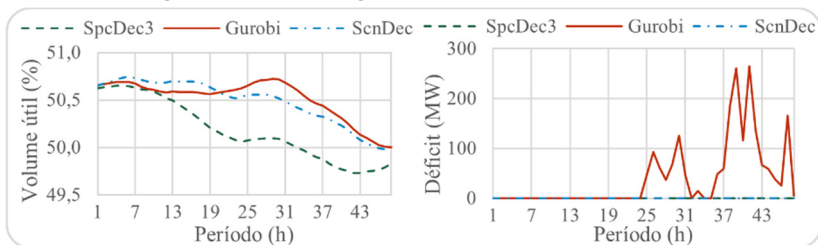


Figura 65: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Bm25.

No caso Bm25 a diferença entre as soluções primais é ainda mais expressiva. Na própria curva de geração e demanda (gráfico a da Figura 64) é possível observar que existe uma parcela de demanda não atendida na solução do Gurobi. Além disso, o comportamento da geração termelétrica é diferente para cada uma das estratégias, apresentando o menor custo esperado de operação com a ScnDec, em que a geração apresenta um comportamento mais constante ao longo dos períodos. A solução obtida pela SpcDec3 usa bastante água nos períodos iniciais e compensa esse esvaziamento dos reservatórios com grande quantidade de geração termelétrica no segundo estágio, sendo que em alguns cenários até é penalizada pelo não atendimento da meta de volume ao final do horizonte. Essa decisão em geral representa um custo elevado de

operação, embora ainda abaixo do custo de operação em que há déficit de energia (obtida pelo Gurobi).

As curvas de geração e demanda para o caso Cm25 são ilustradas na Figura 66. A Figura 67 apresenta a evolução do volume útil e do déficit para esse mesmo caso.

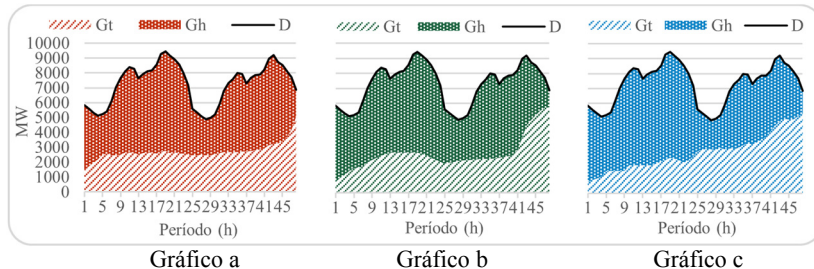


Figura 66: Curva de geração e demanda - caso Cm25.

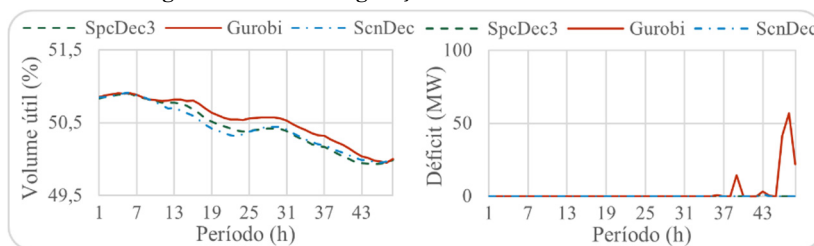


Figura 67: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Cm25.

No sistema teste C tanto a capacidade de geração quanto o número de hidrelétricas e termelétricas é o mesmo. Nesse caso, mesmo apresentando curvas de geração das termelétricas com comportamentos diferentes, os custos esperados de operação das decomposições são bem próximos, sendo o custo ligeiramente inferior na ScnDec. No geral, a solução do Gurobi utiliza menos água dos reservatórios, ocasionando altos custos de operação, além do déficit de energia em determinados cenários.

As mesmas curvas são traçadas para o sistema teste D, apresentadas na Figura 68 e Figura 69.

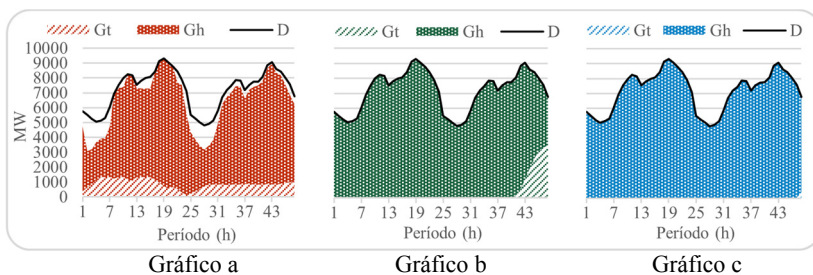


Figura 68: Curva de geração e demanda - caso Dm25.

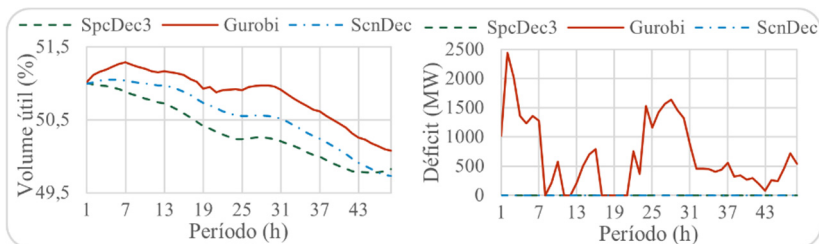


Figura 69: Volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Dm25.

Nesse caso a solução gerada pelo Gurobi claramente apresenta um custo superior, pois tem vários períodos sem atender a demanda. Já a solução da decomposição por cenários não utiliza geração de termelétricas, diferentemente da SpcDec3, que gera com termelétricas nos períodos finais do horizonte. No entanto, o custo de operação da SpcDec3 é inferior, pois a solução da ScnDec não atinge a meta de volume e é penalizada.

Em geral, nota-se que as soluções do Gurobi são mais conservadoras, apresentando uma curva de volume útil acima das demais estratégias para os períodos do horizonte de estudos. Isso faz com que se utilizem mais termelétricas, aumentando o custo esperado de operação do sistema.

Para o sistema teste E, somente a decomposição espacial gerou resultados primais dentro do limite de tempo, ilustrados na Figura 70.

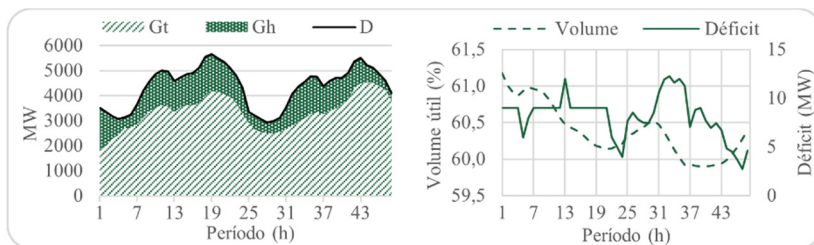


Figura 70: Curva de geração e demanda e evolução do volume útil e déficit ao longo dos períodos - caso Em25.

A Figura 71 ilustra o valor do volume útil armazenado das 14 hidrelétricas do sistema E. Nota-se que as usinas com pouca ou sem capacidade de regularização tem maior variação relativa do volume ao longo das primeiras 24 horas. Nestes casos, pequenas variações na afluência incremental podem afetar consideravelmente o volume do reservatório e, consequentemente, a operação da usina é diretamente afetada pela incerteza das afluências em horizontes de mais curto prazo.

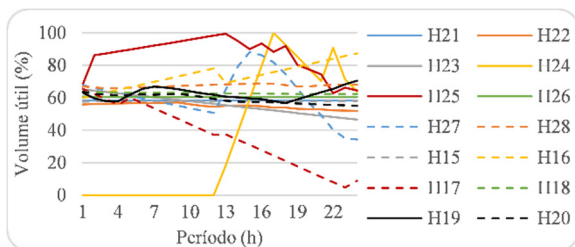


Figura 71: Curva de volume útil das hidrelétricas ao longo dos períodos do primeiro estágio - caso Em25.

Por fim, é interessante notar que nos sistemas cuja participação das termelétricas é maior, A e E, a principal fonte de geração acompanha a variação da demanda, sendo que a fonte com menos participação na matriz apresenta comportamento, em geral, constante ao longo dos períodos, no caso as hidrelétricas. Já nos sistemas B e D, em que há predominância de hidrelétricas, a geração termelétrica tende a ser mais constante ao longo dos períodos enquanto que as hidros acompanham a variação da demanda.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste último capítulo são feitas as principais conclusões e considerações do trabalho de doutorado. Além disso, são descritas algumas sugestões de trabalhos futuros, ou seja, ideias que surgiram e que merecem destaque para serem investigadas.

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme destacado no início deste documento, o sistema elétrico brasileiro possui características que o tornam diferenciado com relação aos demais sistemas de energia elétrica ao redor do mundo. Essas características são as longas linhas de transmissão e a grande predominância de recursos hídricos. Essas complexidades fazem com que seja necessário a adoção de modelos matemáticos para auxiliar nas decisões de planejamento e programação da operação do sistema. Atualmente, no SIN o processo de planejamento da operação é dividido em três etapas com horizontes e características matemáticas distintas.

Os estudos apresentados nesse trabalho são voltados para a última etapa do planejamento, a Programação Diária da Operação Eletroenergética. Nessa etapa consideram-se tanto questões energéticas, como os custos de operação, quanto detalhes elétricos, como a topologia da rede de transmissão. Dadas as particularidades do SIN, em principal o grande porte do sistema, esta etapa resulta em um problema de otimização desafiante e que ainda não possui um modelo oficial.

Assim, muitas contribuições ainda podem ser feitas nessa direção, como por exemplo a consideração de incertezas na modelagem. Conforme observado na revisão bibliográfica, nos últimos anos tem-se observado, em diversos países, um elevado número de trabalhos em que se consideram incertezas na etapa da programação da operação diária. Em suma, os principais fatores difíceis de serem previstos são a demanda das barras e a afluência incremental das usinas hidrelétricas, devido principalmente à fatores como o clima, falhas em equipamentos, geração de fontes eólicas, entre outros. Nesse sentido, este trabalho de doutorado busca contribuir para o desenvolvimento da modelagem e,

principalmente, da estratégia de solução da PDE considerando incertezas em sua modelagem.

O primeiro capítulo descreve os trabalhos mais relevantes da literatura aplicados à programação da operação de unidades geradoras, assim como os objetivos e as principais contribuições da tese.

No Capítulo 2 apresentam-se os conceitos de otimização estocástica pertinentes ao desenvolvimento deste trabalho, destacando-se a formulação por meio do Equivalente Determinístico.

Por sua vez, no Capítulo 3 é apresentada a modelagem de cada componente do sistema hidrotérmico em estudo. Neste, destacam-se três pontos principais, a modelagem da função de produção das unidades hidrelétricas, a modelagem da operação das usinas termelétricas e a modelagem do sistema de transmissão. A geração das usinas hidrelétricas é dada por uma função linear por partes, agrupada por unidades idênticas e aproximada por planos lineares. Por sua vez, na modelagem das usinas termelétricas utiliza-se uma abordagem relativamente nova tanto para a função de produção, proposta por Frangioni e Gentile (2005), quanto para as restrições operativas, proposta por Morales-España *et al.* (2013a). Por fim, a rede de transmissão é modelada por meio da formulação compacta apresentada por Tseng *et al.* (1999).

As estratégias de solução são descritas no Capítulo 4, cujo objetivo principal é apresentar e comparar qualitativamente as diferentes metodologias de decomposição propostas. Inicialmente é descrita a aplicação da RL de diferentes formas ao ED do problema da PDE. Ao todo são quatro estratégias diferentes, três variações da decomposição espacial SpcDec e a decomposição por cenários ScnDec. Em seguida, apresenta-se a estratégia usada como RP, uma heurística baseada em recursões progressivas e regressivas, em que se utilizam as soluções da RL e aproximações da função do custo futuro. Adicionalmente descrevem-se os algoritmos de solução utilizados em cada etapa.

O Capítulo 5 é dividido em três partes principais. Na primeira descrevem-se os dados dos sistemas teste utilizados para avaliar as estratégias de solução. No total são cinco sistemas, diferentes com relação a matriz energética de cada um. Na segunda parte são apresentados os resultados com a RL, cuja principal conclusão é com relação ao uso da metodologia chamada de componentes simples, mostrando que seu uso melhora consideravelmente a otimização do problema dual. Além disso, comparando os quatro esquemas de decomposição mostra-se que os

melhores resultados são obtidos para a estratégia SpcDec3 e ScnDec, tanto para os casos determinísticos quanto estocásticos. Por fim, na terceira parte do capítulo descrevem-se os resultados considerando a metodologia completa, usando a RL e a RP. Neste caso, comparam-se os resultados das estratégias de decomposição SpcDec3 e ScnDec e os resultados obtidos por meio do ED resolvido pelo pacote de otimização Gurobi. Na maioria dos casos determinísticos o melhor desempenho é dado utilizando-se o Gurobi como estratégia de solução. Por outro lado, nos casos estocástico, em que o problema tem um número maior de variáveis e restrições, as decomposições se destacam, apresentando melhor desempenho em 70% dos casos. Desses 70% a decomposição espacial se mostra superior na maioria dos casos, apresentando custos inferiores em aproximadamente três vezes mais casos que a decomposição por cenários. Conforme observado no Capítulo 4, a ScnDec apresenta um menor número de subproblemas, sendo todos problemas de PLIM, ou seja, subproblemas mais complicados de serem resolvidos. Apesar dessa característica contribuir para um menor valor do *gap* entre o *LS* e o *LI*, resulta, em geral, em um desempenho inferior ao da decomposição espacial. Adicionalmente, para alguns sistemas teste a ScnDec apresentou-se mais sensível aos ajustes dos parâmetros da heurística (conforme apresentado na Tabela 17), sendo assim a cada dia de operação ou cenário testado torna-se necessário encontrar um novo ajuste “ideal”.

Com relação ao tipo de matriz energética dos sistemas teste, no geral, nota-se que a maior participação (em capacidade e número de unidades) de termelétricas apresentam os menores *gaps* entre limites inferiores e superiores. Por outro lado, percebe-se uma maior dificuldade de resolução na maioria dos casos com grande participação de hidrelétricas e, em geral, para esses tipos de sistemas quanto maior o volume inicial (ou maior disponibilidade de água) maior é o *gap* de dualidade. A principal razão dessa situação é que a modelagem das hidrelétricas permite um maior número de estados operativos do que as termelétricas, ou seja, tem-se menos restrições que acoplam a operação das unidades ao longo dos períodos. Além disso, os resultados primais apresentados indicam que a principal fonte de geração do sistema acompanha a variação da demanda, sendo que a fonte complementar da matriz apresenta comportamento, em geral, constante ao longo dos períodos.

Por fim, para sistemas de grande porte, como o SIN, o modelo da PDE resultante apresenta um grande número de variáveis e restrições, mesmo considerando somente os casos determinísticos. Nesse caso, quanto maior o problema, maior a necessidade de alguma metodologia mais eficiente de resolução. Assim, conforme mostrado, as decomposições apresentam uma alternativa muito boa, quiçá a única capaz de ter um desempenho aceitável (em um tempo de processamento adequado para a etapa) para resolver o problema da PDE. Assim, muitos trabalhos ainda podem contribuir nessa área para tornar viável a resolução de um problema de otimização para a programação de unidades geradoras com horizontes de dias ou uma semana. Nesse sentido, na próxima seção são apresentados as principais ideias e sugestões que surgiram durante a resolução do trabalho, com o objetivo de prosseguir com os estudos e contribuições na área.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conforme descrito no Capítulo 1, neste trabalho segue-se a estratégia de considerar incertezas em um modelo linear, como um problema de programação estocástica de dois estágios, servindo como ponto de partida para a adição de mais complexidades ao problema e elaboração de diferentes estudos, tanto na modelagem quanto nos algoritmos de solução. Nesse sentido, ao longo do trabalho surgiram ideias interessantes para contribuir ainda mais com os estudos aplicados à PDE.

As sugestões descritas a seguir são divididas em três grupos, relativas à modelagem do problema, relativas à metodologia de resolução da RL e relativas à metodologia de resolução da RP.

6.2.1 Sugestões de estudos da modelagem

Inicialmente destaca-se a modelagem das usinas hidrelétricas. Conforme observado na Tabela 29 e Tabela 30, as maiores diferenças entre o LI e o LS dos métodos ocorrem nos sistemas teste com predominância de usinas hidrelétricas (sistemas B e D). Esses altos *gaps* podem ser causados pela diferença entre a solução contínua e inteira da formulação das hidros, a solução contínua (ou convexificada) está longe da solução inteira. Com base na representação matemática usada nas termelétricas, proposto por Morales-España *et al* (2013a), pode-se

modelar a variável de geração das hidrelétricas através de (113). Isso, poderia facilitar a resolução da mesma forma que nas termelétricas, evitando a descontinuidade entre zero e seu valor mínimo.

$$0 \leq ph \leq ph^{\max} - ph^{\min}, \quad (113)$$

em que:

$ph^{\min(\max)}$ é a geração mínima (máxima) da usina hidrelétrica (MW).

Além disso, uma das principais não linearidades de problemas aplicados em sistemas hidrotérmicos está associada à função de produção das unidades hidrelétricas, assim, outro campo a ser investigado seria a incorporação da representação não linear dessa função. Analisando os erros da aproximação linear por planos e os impactos dessa linearização. Ainda, poderia ser analisado os impactos de se considerar unidades individuais (não mais como grupos) e a inclusão das zonas proibidas de geração.

Um modelo mais detalhada poderia ser usado para a rede de transmissão. Iniciando pelo uso de equações para representar as perdas, mesmo para o modelo de fluxo DC, com somente uma restrição por nó ou por um conjunto de funções lineares por partes. Para melhorar o desempenho do algoritmo de solução pode-se ainda considerar a inclusão das restrições de limites de fluxo nas linhas dinamicamente, visto que para sistemas de grande porte o número de linhas que estão em seus limites são poucas, pode-se reduzir bastante o tamanho do problema. Poderia ser considerado ainda o modelo de rede não linear, composto por funções senoidais e termos quadráticos. Isso exigiria um maior número de variáveis para descrever o problema, no entanto pode fornecer soluções mais próximas da operação em tempo real.

Assim, uma sugestão interessante seria investigar as vantagens e desvantagens do uso de não linearidades na modelagem. A principal alteração na metodologia de soluções seriam os pacotes de otimização usados para resolver os subproblemas, no caso, seriam problemas de programação não linear e não linear inteiro-misto.

Além disso, uma contribuição interessante seria considerar uma árvore multiestágio para a resolução da PDE, em que cada estágio representa um dia de operação. Isso aumentaria muito o tamanho do problema, considerando ainda a resolução de problemas de maior porte, seriam necessárias algumas melhorias nas estratégias de decomposição, como por exemplo as citadas nas seções a seguir.

Vale destacar que a ideia principal neste trabalho é comparar as diferentes metodologias de decomposição e assim propor alternativas e melhorias nas estratégias de resolução da PDE, consequentemente não foram feitas as simulações dos resultados. A simulação de um resultado em um problema estocástico serve para verificar a qualidade da solução encontrada. A partir da solução de primeiro estágio são simuladas várias realizações de segundo estágio, em geral, um número bem maior do que o número de cenários usado na otimização. Isso serve para verificar a representatividade dos cenários, ou seja, se o número utilizado e as realizações sorteadas são adequadas para representar todo (ou grande parte com um determinado nível de confiança) o espaço de estados das variáveis aleatórias. Neste trabalho, considera-se que os cenários usados possuem essa representatividade (cenários especialistas) e assim compara-se somente a capacidade das metodologias em resolver eficientemente o problema em questão. Portanto, uma próxima etapa interessante a ser investigada é no nível de representação das incertezas do problema. Avaliar a quantidade de cenários suficiente para representar o comportamento incerto da demanda e da afluência incremental. Nesse caso, é necessário inicialmente ter algoritmos eficientes para resolverem o problema, e esse passo inicial foi dado com essa tese.

Por fim, outra área a ser explorada seria a utilização de aversão ao risco no modelo. A ideia seria utilizar o CVaR (Valor Condicionado a um Dado Risco), incorporando o custo dos cenários mais críticos na função objetivo, em conjunto com a minimização do custo esperado de operação.

6.2.2 Sugestões de estudos na RL

A primeira sugestão com relação ao método usado para a resolução da RL é relativa ao modelo dual utilizado. O algoritmo de Feixes permite que se utilizem modelos desagregados (utilizado neste trabalho), agregados e parcialmente agregados. Isso não exigiria muito desenvolvimento, mas extensos testes para avaliar e comparar o desempenho desses diferentes modelos, semelhante ao trabalho aplicado na área de logística de Frangioni e Gorgone (2014). Além disso, o uso de método de Feixes em que se consideram as soluções aproximadas dos subproblemas (OLIVEIRA; SAGASTIZÁBAL; SCHEIMBERG, 2011) poderia ser avaliada, principalmente para a estratégia ScnDec, em que os subproblema são mais complicados de serem resolvidos.

Conforme visto nos resultados comparativos entre as decomposições SpcDec1, SpcDec2 e SpcDec3, separando-se o problema original ao máximo obtém-se os menores tempos computacionais com uma razoável perda de qualidade da solução. Assim, uma ideia seria tentar decompor ainda mais os subproblemas. A aplicação de mais de um método de decomposição em conjunto pode ser observado nos trabalhos de Roy (1983) e Palomar e Mung (2006). No primeiro, o autor utiliza uma decomposição cruzada, em que explora simultaneamente a estrutura das decomposições primal e dual para resolver o problema. Por sua vez, no segundo trabalho descrevem-se de maneira geral os métodos de decomposição e sugerem-se estratégias alternativas para a resolução de problemas convexos. Os autores propõem a utilização de uma combinação das decomposições, aplicando-as inclusive nos subproblemas resultantes. No caso da SpcDec3 a ideia seria separar o subproblema Hidráulico ou Termelétrico, ambos estocásticos, em vários subproblemas determinísticos. No caso da ScnDec, separar cada subproblema determinístico em subproblemas por usinas, melhorando o desempenho de resolução de cada subproblema, que conforme visto, é o ponto fraco da estratégia. Em outras palavras, usar decomposições híbridas, que tenham tanta a decomposição espacial quando por cenários aplicada. Isso torna-se necessário à medida em que o porte do sistema aumenta.

Adicionalmente, o que pode melhorar o desempenho dos algoritmos é a paralelização na resolução dos subproblemas. Visto que para cada iteração do método de Feixes é necessário que vários subproblemas sejam resolvidos, dividir essa atividade poderia gerar grandes ganhos no tempo de processamento.

6.2.3 Sugestões de estudos na RP

Além das melhorias na etapa da RL, a heurística usada como RP também pode ser melhorada. A princípio avaliar a necessidade de execução a cada iteração da RL, mesmo que seu tempo relativo seja pequeno, comparada com a resolução do problema dual e dos subproblemas primais, isso poderia trazer algumas vantagens, por exemplo, executar a RP somente para os passos sérios do método de Feixes. A ideia mais sensata seria aplicar a recuperação primal a partir de uma regra de melhoria da função dual ou subgradiente do problema dual.

Outra área a ser estudada seria no processo de solução da própria heurística, a maneira como são divididos os subproblemas, um para cada período, poderiam ser agrupados em dois ou mais. Usar as aproximações da função de custo futuro agregadas, ou seja, um valor esperado. Tratar as inviabilidades de maneira diferente, através de cortes de viabilidade, diferentemente de usar variáveis de folga e somente cortes de otimalidade.

A heurística também pode ser comparada com outras estratégias de RP, como o Lagrangeano Aumentado Inexato. Para a decomposição espacial tem-se a aplicação do método do Problema do Princípio Auxiliar (PPA) e para a decomposição por cenários o *Progressive Hedging* (PH). O PPA já tem sido aplicado e demonstrado bons resultados no caso determinístico da PDE (RODRIGUES, 2009; TAKIGAWA, 2010). Por sua vez o PH tem sido aplicado e se mostrado vantajoso sobre a resolução do ED para problemas lineares aplicados à sistemas hidrotérmicos (SANTOS *et al.*, 2009) e também aplicados em problemas inteiro-mistos (WATSON; WOODRUFF, 2011). Por outro lado, novos métodos também podem ser explorados, conforme artigo de Sagastizábal (2012).

Os resultados indicam que os métodos de decomposição dual são promissores na resolução da PDE com incertezas, principalmente quando o número de cenários ou o tamanho do sistema for maior do que o apresentado nos sistemas teste. Um estudo iniciado é a aplicação em sistemas de grande porte, como o SIN. Nesses sistemas, reunir e organizar os dados, por si só, é uma tarefa bastante custoso. Os resultados preliminares para um problema desse porte, resolvido por meio do Gurobi e da decomposição SpcDec3, são apresentados na Tabela 33 e Tabela 34, respectivamente. Por limitações de memória RAM desconsiderou-se a rede de transmissão e as incertezas. O sistema tem 164 usinas hidrelétricas (203 grupos) e 412 termelétricas, resolvido para sete cenários diferentes.

Tabela 33: Resultados para um sistema de grande porte - Gurobi.

Cenário	LI (R\$)	LS (R\$)	Gap4 (%)	Tem. (min)
1	1.945.217,02	1.945.217,02	0,0	7,7
2	8.659.410,74	27.549.861.565,36	91.524,7	60,0
3	6.048.832,39	40.197.464.369,52	136.038,5	60,0
4	5.542.550,41	34.757.581.818,28	139.357,8	60,0
5	7.228.960,86	39.378.674.530,29	144.198,0	60,0
6	6.512.480,27	62.741.817.027,06	323.723,7	60,0
7	3.889.463,56	17.239.231.489,35	174.507,5	60,0

Tabela 34: Resultados para um sistema de grande porte – SpcDec3.

Cenário	LI (R\$)	LS (R\$)	Gap4 (%)	Tem. (min)
1	1.945.217,02	1.945.217,02	0,0	49,6
2	5.492.902,37	30.069.746,95	0,0	60,2
3	3.950.690,66	29.642.903,00	0,0	60,4
4	3.647.832,14	25.086.237,59	0,0	60,2
5	4.709.264,89	27.383.828,48	0,0	60,7
6	4.118.128,03	19.497.173,66	0,0	60,9
7	3.173.258,77	9.978.269,13	0,0	60,2

Conforme pode-se observar, somente para o cenário 1 que o pacote de otimização Gurobi apresentou resultados competitivos. Nesse caso, a disponibilidade de água é alta e a solução do problema é o mínimo custo de operação. Nos demais casos a decomposição é muito mais vantajosa. Assim, como tarefas e sugestões futuras tem-se também melhorar o aproveitamento de memória RAM do algoritmo ou resolver os problemas em computadores com maior disponibilidade de memória. Tornando possível para resolver o problema considerando a rede de transmissão e incertezas no problema.

APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DOS SUBPROBLEMAS DA RP NA RECURSÃO REGRESSIVA

Nesse apêndice busca-se demonstrar a formulação dos subproblemas da RP resolvidos na recursão regressiva, baseado na decomposição de Benders, os subproblemas são de PL com aproximações do custo futuro.

Para exemplificação considera-se o problema (1) da seção 2.3.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{n=1}^N p_n \cdot c'_n \cdot x_n \\ \text{s.a :} \quad & \sum_{t=0}^{T_2-1} \mathbf{A}_{n-t}^n \cdot x_{n-t} \geq b_n, \quad (\varphi_n) \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{114}$$

em que:

- n é o índice do nó da árvore de cenários;
- N é o número total de nós da árvore de cenários;
- p_n é a probabilidade associada ao nó n ;
- c'_n é o vetor de custos das decisões do nó n ; Tamanho $ac \times 1$;
, representa transposto;
- x_n é o vetor de variáveis de decisão do nó n ; Tamanho $ac \times 1$;
- \mathbf{A}_{n-t}^n é a matriz das restrições do nó n ; quando $t = 0$, $n_0 = n$, ou seja, o índice refere-se ao próprio nó n ; Tamanho $al \times ac$;
- b_n é o vetor de constantes das restrições, podendo conter elementos que representam as variáveis aleatórias; Tamanho $al \times 1$;
- φ_n é o vetor de multiplicadores de Lagrange (ou preços sombra, ou variáveis duais) relativo às restrições do nó n .

Conforme descrito no último parágrafo da seção 2.2 a notação n_{-q} , remete ao nó antecessor, ao nó n , q períodos de tempo antes, e $N_{+1}(n)$ representa o conjunto de nós diretamente sucessores ao nó n .

A estratégia consiste em representar por meio de aproximações lineares o custo futuro das decisões tomadas no presente. Assim, considerando a árvore de cenários da Figura 12, com 9 nós ($T_2 = 6$, $N = 9$, $N_L = \{6, 9\}$), inicia-se a formulação pelos subproblemas referentes aos últimos períodos do horizonte.

Inicialmente o subproblema do nó 9 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & f_9(x_8, x_7, x_3, x_2, x_1) = \\ & \min p_9 \cdot c'_9 \cdot x_9 \end{aligned} \quad (115)$$

s.a :

$$\mathbf{A}_9^9 \cdot x_9 \geq b_9 - \mathbf{A}_8^9 \cdot x_8 - \mathbf{A}_7^9 \cdot x_7 - \mathbf{A}_3^9 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^9 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^9 \cdot x_1, (\varphi_9)$$

A dimensão de φ é de $al \times k$, em que k é o número de iterações, pois o valor dos multiplicadores de cada iteração devem ser usado nos cortes.

Se o problema (115) for convexo, pode-se aplicar a teoria da dualidade e escrevê-lo por meio de aproximações lineares.

$$\min ap_9$$

s.a :

$$ap_9 \cdot ee \geq \varphi_9' \cdot (b_9 - \mathbf{A}_8^9 \cdot x_8 - \mathbf{A}_7^9 \cdot x_7 - \mathbf{A}_3^9 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^9 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^9 \cdot x_1), \quad (116)$$

em que:

ap é a aproximação linear de f_9 ;

ee é um vetor unitário de tamanho $k \times 1$.

A variável ap é multiplicada por um vetor unitário com dimensões de $k \times 1$, em que k é o número de aproximações lineares, no caso do algoritmo de Benders também equivale ao número de iterações.

Essa aproximação do subproblema de $n = 9$ pode ser inserida no subproblema que representa o nó 8.

$$f_8(x_7, x_3, x_2, x_1) =$$

$$\min p_8 \cdot c'_8 \cdot x_8 + ap_9$$

s.a :

$$\mathbf{A}_8^8 \cdot x_8 \geq b_8 - \mathbf{A}_7^8 \cdot x_7 - \mathbf{A}_3^8 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^8 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^8 \cdot x_1, \quad (\varphi_8) \quad (117)$$

$$ap_9 \cdot ee + \varphi_9' \cdot \mathbf{A}_8^9 \cdot x_8 \geq$$

$$\varphi_9' \cdot (b_9 - \mathbf{A}_7^9 \cdot x_7 - \mathbf{A}_3^9 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^9 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^9 \cdot x_1), \quad (\upsilon_{8,9})$$

em que:

υ é o vetor de multiplicadores de Lagrange da aproximação linear adicionada; possui dois índices: o primeiro é relativo ao nó n e o segundo se refere ao subproblema que é aproximado pela restrição.

De acordo com a dimensão dos vetores e matrizes do problema \mathbf{v} tem o tamanho de $k \times k$, cuja estrutura é dada por.

$$\mathbf{v}_{n,na} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n,na}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{v}_{n,na}^1 & \mathbf{v}_{n,na}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_{n,na}^1 & \mathbf{v}_{n,na}^2 & \dots & \mathbf{v}_{n,na}^k \end{bmatrix} \quad (118)$$

Note, que a medida em que as iterações k aumentam a dimensão dos subproblemas também aumenta.

Da mesma forma o subproblema para $n = 8$ pode ser incluído no subproblema que representa $n = 7$.

$$f_7(x_3, x_2, x_1) =$$

$$\min p_7 \cdot c_7' \cdot x_7 + ap_8$$

s.a :

$$\mathbf{A}_7^7 \cdot x_7 \geq b_7 - \mathbf{A}_3^7 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^7 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^7 \cdot x_1, \quad (\varphi_7) \quad (119)$$

$$ap_8 \cdot ee + \varphi_8' \cdot \mathbf{A}_7^8 \cdot x_7 + \mathbf{v}_{8,9} \cdot \varphi_9' \cdot \mathbf{A}_7^9 \cdot x_7 \geq$$

$$\varphi_8' \cdot (b_8 - \mathbf{A}_3^8 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^8 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^8 \cdot x_1) +$$

$$\mathbf{v}_{8,9} \cdot \varphi_9' \cdot (b_9 - \mathbf{A}_3^9 \cdot x_3 - \mathbf{A}_2^9 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^9 \cdot x_1), \quad (\mathbf{v}_{7,8})$$

Note agora que o corte adicionado em (117) também é utilizada na construção do corte em (119), pois o acoplamento entre as variáveis é de mais de um período de tempo.

Os subproblemas para os nós 6, 5 e 4 são semelhantes aos ilustrados anteriormente. No caso do nó 3, tem-se duas possibilidades de nós futuros, ou seja, $N_{+1}(3) = \{4, 7\}$. Nestes casos tem-se diferentes possibilidades de realizações (nós futuros) da árvore de cenários, assim a aproximação da função de custo futuro pode ser construída de duas maneiras diferentes: com os valores esperados (cortes agregados) ou por meio de uma aproximação por realização (cortes desagregados).

Os cortes agregados são construídos considerando a probabilidade de ocorrência das realizações, portanto utiliza-se o valor esperado das variáveis nos cortes. Assim, um possível problema é com relação ao valor das variáveis binárias, pois elas poderiam assumir valores não inteiros e consequentemente levar a um resultado inviável.

Por sua vez, a utilização da aproximação desagregada representa melhor o custo futuro (ela permite muito mais combinações entre os cortes de diferentes cenários, ao invés de usar somente as aproximações agregadas), porém utiliza-se muito mais restrições, ao invés de uma restrição por iteração adicionam-se tantas quantas realizações existirem.

Neste trabalho utiliza-se a formulação desagregada, assim o subproblema para $n = 3$ é o seguinte.

$$\begin{aligned}
 & f_3(x_2, x_1) = \\
 & \min p_3 \cdot c'_3 \cdot x_3 + ap_4 + ap_7 \\
 & \text{s.a :} \\
 & \mathbf{A}_3^3 \cdot x_3 \geq b_3 - \mathbf{A}_2^3 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^3 \cdot x_1, \quad (\varphi_3) \\
 & ap_4 \cdot ee + \varphi_4' \cdot \mathbf{A}_3^4 \cdot x_3 + v_{4,5} \cdot \left(\varphi_5' \cdot \mathbf{A}_3^5 \cdot x_3 + v_{5,6} \cdot \varphi_6' \cdot \mathbf{A}_3^6 \cdot x_3 \right) \geq \\
 & \varphi_4' \cdot \left(b_4 - \mathbf{A}_2^4 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^4 \cdot x_1 \right) + \\
 & v_{4,5} \cdot \left(\varphi_5' \cdot \left(b_5 - \mathbf{A}_2^5 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^5 \cdot x_1 \right) + \right. \\
 & \left. v_{5,6} \cdot \varphi_6' \cdot \left(b_6 - \mathbf{A}_2^6 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^6 \cdot x_1 \right) \right), \quad (v_{3,4}) \\
 & ap_7 \cdot ee + \varphi_7' \cdot \mathbf{A}_3^7 \cdot x_3 + v_{7,8} \cdot \left(\varphi_8' \cdot \mathbf{A}_3^8 \cdot x_3 + v_{8,9} \cdot \varphi_9' \cdot \mathbf{A}_3^9 \cdot x_3 \right) \geq \\
 & \varphi_7' \cdot \left(b_7 - \mathbf{A}_2^7 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^7 \cdot x_1 \right) + \\
 & v_{7,8} \cdot \left(\varphi_8' \cdot \left(b_8 - \mathbf{A}_2^8 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^8 \cdot x_1 \right) + \right. \\
 & \left. v_{8,9} \cdot \varphi_9' \cdot \left(b_9 - \mathbf{A}_2^9 \cdot x_2 - \mathbf{A}_1^9 \cdot x_1 \right) \right), \quad (v_{3,7})
 \end{aligned} \tag{120}$$

Continuando assim chega-se ao subproblema referente ao nó 1 com a aproximação linear equivalente a todo o custo futuro (do nó 2 ao final do horizonte de estudo). As aproximações são atualizadas (inclui-se outros cortes) a cada iteração, com o objetivo de melhorar a representação da função de custo futuro.

Escrevendo toda essa formulação de forma genérica.

$$\begin{aligned}
 & f_n(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = \\
 & \min p_n \cdot c'_n \cdot x_n + \sum_{m \in N_{+1}(n)} ap_m \\
 & \text{s.a :}
 \end{aligned} \tag{121}$$

$$\mathbf{A}_n^n \cdot x_n \geq b_n - \sum_{t=1}^{T_2-1} \mathbf{A}_{n-t}^n \cdot x_{n-t}, \quad (\varphi_n)$$

$$ap_m \cdot ee + \sum_{t=1}^{T_2-1} \pi_m^q \cdot x_{m-t} \geq \delta_m, \forall m \in N_{+1}(n), \quad (\upsilon_{n,m})$$

em que os valores de π e δ são dados por:

$$\pi_n^t = \varphi_n' \cdot \mathbf{A}_{n-q}^n + \sum_{m \in N_{+1}(n)} \upsilon_{n,m} \cdot \pi_m^{t+1},$$

$$\pi_{n \in N_L}^t = \varphi_n' \cdot \mathbf{A}_{n-q}^n, \tag{122}$$

$$\delta_n = \varphi_n' \cdot b_n + \sum_{m \in N_{+1}(n)} \upsilon_{n,m} \cdot \delta_m,$$

$$\delta_{n \in N_L} = \varphi_n' \cdot b_n.$$

APÊNDICE B – DADOS DOS SISTEMAS TESTE

As tabelas de dados dos sistemas teste são apresentados neste apêndice. Inicialmente, tem-se as informações do reservatório das hidrelétricas é apresentado na Tabela 35, em que F_s indica se a vazão vertida influencia no nível a jusante.

Tabela 35: Dados das usinas hidrelétricas.

	v^{\min} (hm^3)	v^{\max} (hm^3)	s^{\max} (m^3/s)	F_s	Sist.		v^{\min} (hm^3)	v^{\max} (hm^3)	s^{\max} (m^3/s)	F_s	Sist.
H ₁	1.974	5.779	3.112	Sim	B,C,D	H ₁₅	120	792	484	Não	E
H ₂	2.562	2.950	2.872	Sim	B,C,D	H ₁₆	4	11	520	Não	E
H ₃	169	431	352	Sim	B,C,D	H ₁₇	262	269	129	Sim	E
H ₄	30	35	336	Sim	B,C,D	H ₁₈	1.540	4.040	292	Sim	E
H ₅	2.662	6.775	3.568	Sim	B,C,D	H ₁₉	360	450	236	Não	E
H ₆	948	1.124	4.040	Sim	B,C,D	H ₂₀	1.976	2.244	348	Não	E
H ₇	3.013	3.573	4.752	Sim	B,C,D	H ₂₁	185	1.589	236	Não	E
H ₈	2.712	4.904	1.170	Sim	A,D	H ₂₂	127	150	304	Sim	E
H ₉	1.320	1.477	1.266	Não	A,D	H ₂₃	87	92	348	Não	E
H ₁₀	2.283	3.340	2.970	Sim	A,D	H ₂₄	10	11	820	Não	E
H ₁₁	4.300	5.100	3.600	Sim	A,D	H ₂₅	50	55	748	Não	E
H ₁₂	185	1.589	236	Não	A,C,D	H ₂₆	51	555	208	Sim	E
H ₁₃	127	1.505	304	Sim	A,C,D	H ₂₇	9	13	328	Sim	E
H ₁₄	1.512	1.513	4.208	Não	A,C,D	H ₂₈	8	24	392	Sim	E

As demais informações dos polinômios de cota de montante e de jusante são apresentados na Tabela 36 e Tabela 37.

Tabela 36: Coeficientes da cota de montante das usinas hidrelétricas.

Usina	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
H ₁	$6,51 \cdot 10^2$	$3,50 \cdot 10^{-2}$	$-6,50 \cdot 10^{-6}$	$7,78 \cdot 10^{-10}$	$-3,95 \cdot 10^{-14}$
H ₂	$5,53 \cdot 10^2$	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$-2,10 \cdot 10^{-6}$	0,00	0,00
H ₃	$7,66 \cdot 10^2$	$1,69 \cdot 10^{-1}$	$-3,13 \cdot 10^{-4}$	$3,99 \cdot 10^{-7}$	$-2,25 \cdot 10^{-10}$
H ₄	$6,69 \cdot 10^2$	2,78	$-1,12 \cdot 10^{-1}$	$2,60 \cdot 10^{-3}$	$-2,30 \cdot 10^{-5}$
H ₅	$4,48 \cdot 10^2$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$-2,87 \cdot 10^6$	$3,00 \cdot 10^{-10}$	$-1,27 \cdot 10^{-14}$
H ₆	$3,66 \cdot 10^2$	$4,49 \cdot 10^{-2}$	$-2,41 \cdot 10^{-5}$	$9,35 \cdot 10^{-9}$	$-1,45 \cdot 10^{-12}$
H ₇	$-7,60 \cdot 10^2$	1,22	$-5,23 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{-7}$	$-7,19 \cdot 10^{-12}$
H ₈	$5,40 \cdot 10^2$	$4,46 \cdot 10^{-2}$	$-8,15 \cdot 10^{-6}$	$9,32 \cdot 10^{-10}$	$-4,39 \cdot 10^{-14}$
H ₉	$2,43 \cdot 10^2$	1,07	$-1,10 \cdot 10^{-3}$	$5,21 \cdot 10^{-7}$	$-9,24 \cdot 10^{-11}$
H ₁₀	$4,01 \cdot 10^2$	$5,01 \cdot 10^{-2}$	$-1,57 \cdot 10^{-5}$	$3,30 \cdot 10^{-9}$	$-2,88 \cdot 10^{-13}$
H ₁₁	$3,35 \cdot 10^2$	$6,78 \cdot 10^{-3}$	0,00	0,00	0,00
H ₁₂	$5,80 \cdot 10^2$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$-1,41 \cdot 10^{-5}$	$6,34 \cdot 10^{-9}$	$-1,15 \cdot 10^{-12}$

H₁₃	$2,96 \cdot 10^2$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$-2,23 \cdot 10^{-4}$	0,00	0,00
H₁₄	$2,32 \cdot 10^2$	$4,83 \cdot 10^{-2}$	$-3,43 \cdot 10^{-5}$	$1,48 \cdot 10^{-8}$	$-2,40 \cdot 10^{-12}$
H₁₅	$8,94 \cdot 10^2$	$5,35 \cdot 10^{-2}$	$-7,76 \cdot 10^{-5}$	$7,38 \cdot 10^{-8}$	$-2,80 \cdot 10^{-11}$
H₁₆	$8,75 \cdot 10^2$	1,45	$-4,13 \cdot 10^{-2}$	0,00	0,00
H₁₇	$8,02 \cdot 10^2$	$1,97 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-5}$	0,00	0,00
H₁₈	$6,44 \cdot 10^2$	$5,44 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-6}$	$-4,00 \cdot 10^{-10}$	$3,65 \cdot 10^{-14}$
H₁₉	$5,44 \cdot 10^2$	$3,33 \cdot 10^{-2}$	$1,78 \cdot 10^{-15}$	0,00	0,00
H₂₀	$4,17 \cdot 10^2$	$9,65 \cdot 10^{-2}$	$-4,22 \cdot 10^{-5}$	$6,50 \cdot 10^{-9}$	0,00
H₂₁	$5,80 \cdot 10^2$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$-1,41 \cdot 10^{-5}$	$6,34 \cdot 10^{-9}$	$-1,15 \cdot 10^{-12}$
H₂₂	$3,29 \cdot 10^2$	0,00	0,00	0,00	0,00
H₂₃	$2,23 \cdot 10^2$	$1,58 \cdot 10^{-1}$	$6,08 \cdot 10^{-4}$	$-2,95 \cdot 10^{-6}$	0,00
H₂₄	$1,33 \cdot 10^2$	2,41	$-1,50 \cdot 10^{-1}$	$5,24 \cdot 10^{-3}$	$-6,58 \cdot 10^{-5}$
H₂₅	$4,28 \cdot 10^2$	$-2,27 \cdot 10^1$	$5,83 \cdot 10^{-1}$	$-6,53 \cdot 10^{-3}$	$2,72 \cdot 10^{-5}$
H₂₆	$8,17 \cdot 10^2$	$1,82 \cdot 10^{-1}$	$-4,69 \cdot 10^{-4}$	$7,02 \cdot 10^{-7}$	$-4,07 \cdot 10^{-10}$
H₂₇	$6,34 \cdot 10^2$	5,22	$-3,58 \cdot 10^{-1}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$-2,06 \cdot 10^{-4}$
H₂₈	$5,52 \cdot 10^2$	1,81	$-5,67 \cdot 10^{-2}$	$8,64 \cdot 10^{-4}$	$-4,44 \cdot 10^{-6}$

Tabela 37: Coeficientes da cota de jusante das usinas hidrelétricas.

Usina	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
H₁	$6,02 \cdot 10^2$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$4,21 \cdot 10^{-7}$	$-8,31 \cdot 10^{-11}$	$4,76 \cdot 10^{-15}$
H₂	$4,90 \cdot 10^2$	$6,08 \cdot 10^{-5}$	$2,92 \cdot 10^{-7}$	$-2,32 \cdot 10^{-11}$	$4,56 \cdot 10^{-16}$
H₃	$7,06 \cdot 10^2$	$3,58 \cdot 10^{-3}$	$8,09 \cdot 10^{-6}$	$-1,97 \cdot 10^{-8}$	$1,22 \cdot 10^{-11}$
H₄	$6,05 \cdot 10^2$	$2,78 \cdot 10^{-2}$	$-4,63 \cdot 10^{-5}$	$3,36 \cdot 10^{-8}$	$-8,92 \cdot 10^{-12}$
H₅	$3,94 \cdot 10^2$	$2,11 \cdot 10^{-3}$	$-7,92 \cdot 10^{-8}$	$2,35 \cdot 10^{-12}$	$-2,71 \cdot 10^{-17}$
H₆	$3,22 \cdot 10^2$	$2,28 \cdot 10^{-3}$	$-1,40 \cdot 10^{-7}$	$3,84 \cdot 10^{-12}$	$-5,36 \cdot 10^{-17}$
H₇	$2,58 \cdot 10^2$	$6,21 \cdot 10^{-4}$	$-1,72 \cdot 10^{-8}$	$2,28 \cdot 10^{-13}$	$1,22 \cdot 10^{-20}$
H₈	$4,80 \cdot 10^2$	$1,62 \cdot 10^{-3}$	$-4,52 \cdot 10^{-8}$	0,00	0,00
H₉	$4,70 \cdot 10^2$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$-5,59 \cdot 10^{-6}$	$1,73 \cdot 10^{-9}$	$-2,01 \cdot 10^{-13}$
H₁₀	$3,72 \cdot 10^2$	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$-8,53 \cdot 10^{-8}$	$2,38 \cdot 10^{-12}$	$-2,62 \cdot 10^{-17}$
H₁₁	$2,64 \cdot 10^2$	$9,15 \cdot 10^{-4}$	$-6,71 \cdot 10^{-9}$	0,00	0,00
H₁₂	$3,35 \cdot 10^2$	$8,17 \cdot 10^{-3}$	$-5,67 \cdot 10^{-6}$	0,00	0,00
H₁₃	$2,65 \cdot 10^2$	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-5}$	$-2,80 \cdot 10^{-8}$	$1,18 \cdot 10^{-11}$
H₁₄	$2,11 \cdot 10^2$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$-1,09 \cdot 10^{-7}$	$5,87 \cdot 10^{-12}$	$-1,14 \cdot 10^{-16}$
H₁₅	$8,86 \cdot 10^2$	0,00	0,00	0,00	0,00
H₁₆	$8,56 \cdot 10^2$	$7,65 \cdot 10^{-3}$	$-5,45 \cdot 10^{-6}$	$2,65 \cdot 10^{-9}$	$-4,60 \cdot 10^{-13}$
H₁₇	$7,68 \cdot 10^2$	0,00	0,00	0,00	0,00
H₁₈	$6,19 \cdot 10^2$	$1,73 \cdot 10^{-3}$	$-4,89 \cdot 10^{-8}$	0,00	0,00
H₁₉	$5,10 \cdot 10^2$	$1,77 \cdot 10^{-3}$	$-7,40 \cdot 10^{-8}$	$1,12 \cdot 10^{-11}$	$-4,80 \cdot 10^{-16}$
H₂₀	$4,66 \cdot 10^2$	$8,72 \cdot 10^{-4}$	$-7,38 \cdot 10^{-8}$	$6,34 \cdot 10^{-12}$	$-1,90 \cdot 10^{-16}$
H₂₁	$3,35 \cdot 10^2$	$8,17 \cdot 10^{-3}$	$-5,67 \cdot 10^{-6}$	0,00	0,00
H₂₂	$2,65 \cdot 10^2$	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-5}$	$-2,80 \cdot 10^{-8}$	$1,18 \cdot 10^{-11}$
H₂₃	$1,37 \cdot 10^2$	$2,13 \cdot 10^{-2}$	$-3,41 \cdot 10^{-5}$	$2,88 \cdot 10^{-8}$	$-9,14 \cdot 10^{-12}$
H₂₄	$1,05 \cdot 10^2$	$3,67 \cdot 10^{-3}$	$-3,30 \cdot 10^{-7}$	$2,04 \cdot 10^{-11}$	$-4,99 \cdot 10^{-16}$

H₂₅	$6,74 \cdot 10^1$	$5,02 \cdot 10^{-3}$	$-1,12 \cdot 10^{-6}$	$1,44 \cdot 10^{-10}$	$-6,93 \cdot 10^{-15}$
H₂₆	$7,47 \cdot 10^2$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$-6,00 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-6}$	$-1,28 \cdot 10^{-9}$
H₂₇	$5,72 \cdot 10^2$	$6,46 \cdot 10^{-2}$	$-2,32 \cdot 10^{-4}$	$4,39 \cdot 10^{-7}$	$-3,12 \cdot 10^{-10}$
H₂₈	$5,45 \cdot 10^2$	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$-1,88 \cdot 10^{-5}$	$1,93 \cdot 10^{-8}$	$-7,46 \cdot 10^{-12}$

Por sua vez, os dados das unidades hidrelétricas que compõem os grupos são apresentados na Tabela 38.

Tabela 38: Dados das unidades hidrelétricas.

Grupo	U	qu^{\min} (m ³ /s)	qu^{\max} (m ³ /s)	phu^{\min} (MW)	phu^{\max} (MW)	hl (s ² /m ⁵)
H_{1,1}	4	216	389	246	419	$1,49 \cdot 10^{-5}$
H_{2,1}	4	199	359	185	315	$1,89 \cdot 10^{-5}$
H_{3,1}	2	49	88	35	60	$2,96 \cdot 10^{-4}$
H_{4,1}	2	47	84	35	60	$5,59 \cdot 10^{-4}$
H_{5,1}	4	248	446	208	355	$1,08 \cdot 10^{-5}$
H_{6,1}	4	189	341	107	182	$1,62 \cdot 10^{-5}$
H_{6,2}	2	182	328	103	175	$1,74 \cdot 10^{-5}$
H_{7,1}	4	330	594	182	310	$7,13 \cdot 10^{-6}$
H_{8,1}	3	108	195	136	233	$1,12 \cdot 10^{-4}$
H_{9,1}	3	117	211	172	293	$1,04 \cdot 10^{-4}$
H_{10,1}	3	275	495	223	380	$5,60 \cdot 10^{-6}$
H_{11,1}	5	200	360	200	290	$1,98 \cdot 10^{-5}$
H_{12,1}	2	33	59	66	113	$2,69 \cdot 10^{-3}$
H_{13,1}	2	42	76	22	37	$3,07 \cdot 10^{-4}$
H_{14,1}	4	292	526	125	214	$4,62 \cdot 10^{-6}$
H_{15,1}	2	67	121	14	23	$2,44 \cdot 10^{-5}$
H_{16,1}	2	35	63	8	13	$1,51 \cdot 10^{-4}$
H_{16,2}	1	38	69	8	14	$1,23 \cdot 10^{-4}$
H_{16,3}	1	36	65	8	13	$1,41 \cdot 10^{-4}$
H_{17,1}	3	118	215	36	60	$2,21 \cdot 10^{-5}$
H_{18,1}	2	66	120	23	38	$2,81 \cdot 10^{-5}$
H_{18,2}	2	74	135	27	45	$2,32 \cdot 10^{-5}$
H_{18,3}	4	86	156	31	51	$1,71 \cdot 10^{-5}$
H_{18,4}	2	90	163	32	54	$1,60 \cdot 10^{-5}$
H_{19,1}	4	163	296	64	106	$8,17 \cdot 10^{-6}$
H_{20,1}	4	240	436	57	95	$1,27 \cdot 10^{-6}$
H_{21,1}	2	33	59	66	113	$2,69 \cdot 10^{-3}$
H_{22,1}	2	42	76	22	37	$3,07 \cdot 10^{-4}$
H_{23,1}	3	32	58	26	43	$2,85 \cdot 10^{-3}$
H_{24,1}	2	113	205	39	65	$1,16 \cdot 10^{-4}$
H_{25,1}	2	103	187	30	50	$3,29 \cdot 10^{-5}$
H_{26,1}	1	29	52	25	41	$9,33 \cdot 10^{-4}$
H_{26,2}	1	29	52	24	39	$9,33 \cdot 10^{-4}$

H_{27,1}	4	23	41	16	27	$1,43 \cdot 10^{-3}$
H_{28,1}	2	54	98	10	16	$3,73 \cdot 10^{-5}$

Os coeficientes do polinômio de rendimento hidráulico, equação (11), são apresentados na Tabela 39. Esse polinômio é utilizado como base para a aproximação da função de produção de cada grupo de unidades, conforme detalhado na seção 3.2.1.2.

Tabela 39: Coeficientes do polinômio de rendimento hidráulico das unidades.

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
H_{1,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$2,96 \cdot 10^{-3}$	$2,60 \cdot 10^{-3}$	$7,37 \cdot 10^{-6}$	$-7,77 \cdot 10^{-6}$	$-1,62 \cdot 10^{-5}$
H_{2,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$3,21 \cdot 10^{-3}$	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$9,81 \cdot 10^{-6}$	$-9,13 \cdot 10^{-6}$	$-2,44 \cdot 10^{-5}$
H_{3,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$1,29 \cdot 10^{-2}$	$4,17 \cdot 10^{-3}$	$5,15 \cdot 10^{-5}$	$-1,48 \cdot 10^{-4}$	$-4,15 \cdot 10^{-5}$
H_{4,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$1,37 \cdot 10^{-2}$	$3,93 \cdot 10^{-3}$	$5,15 \cdot 10^{-5}$	$-1,66 \cdot 10^{-4}$	$-3,69 \cdot 10^{-5}$
H_{5,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$2,64 \cdot 10^{-3}$	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$8,70 \cdot 10^{-6}$	$-6,18 \cdot 10^{-6}$	$-2,84 \cdot 10^{-5}$
H_{6,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$3,45 \cdot 10^{-3}$	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-5}$	$-1,06 \cdot 10^{-5}$	$-6,31 \cdot 10^{-5}$
H_{6,2}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$3,59 \cdot 10^{-3}$	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$1,77 \cdot 10^{-5}$	$-1,14 \cdot 10^{-5}$	$-6,31 \cdot 10^{-5}$
H_{7,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$5,37 \cdot 10^{-3}$	$9,96 \cdot 10^{-6}$	$-3,33 \cdot 10^{-6}$	$-6,91 \cdot 10^{-5}$
H_{8,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$5,85 \cdot 10^{-3}$	$2,37 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-5}$	$-3,04 \cdot 10^{-5}$	$-1,34 \cdot 10^{-5}$
H_{9,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$5,54 \cdot 10^{-3}$	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$-2,73 \cdot 10^{-5}$	$-9,43 \cdot 10^{-6}$
H_{10,1}	$6,90 \cdot 10^{-2}$	$3,01 \cdot 10^{-3}$	$5,56 \cdot 10^{-3}$	$5,84 \cdot 10^{-6}$	$-4,64 \cdot 10^{-6}$	$-3,64 \cdot 10^{-5}$
H_{11,1}	$2,45 \cdot 10^{-1}$	$2,89 \cdot 10^{-3}$	$6,66 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$-9,18 \cdot 10^{-6}$	$-5,74 \cdot 10^{-5}$
H_{12,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$2,01 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-5}$	$-3,58 \cdot 10^{-4}$	$-4,84 \cdot 10^{-6}$
H_{13,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$5,76 \cdot 10^{-3}$	$8,35 \cdot 10^{-5}$	$-2,03 \cdot 10^{-4}$	$-7,94 \cdot 10^{-5}$
H_{14,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$6,97 \cdot 10^{-3}$	$1,44 \cdot 10^{-5}$	$-4,16 \cdot 10^{-6}$	$-0,00012$
H_{15,1}	$-6,91 \cdot 10^{-1}$	$1,94 \cdot 10^{-2}$	$5,15 \cdot 10^{-2}$	$-3,65 \cdot 10^{-4}$	$-5,32 \cdot 10^{-5}$	$-2,98 \cdot 10^{-4}$
H_{16,1}	$8,23 \cdot 10^{-1}$	$6,51 \cdot 10^{-3}$	$-5,04 \cdot 10^{-3}$	$-6,42 \cdot 10^{-6}$	$-7,73 \cdot 10^{-5}$	$1,29 \cdot 10^{-4}$
H_{16,2}	$8,23 \cdot 10^{-1}$	$6,51 \cdot 10^{-3}$	$-5,04 \cdot 10^{-3}$	$-6,42 \cdot 10^{-6}$	$-7,73 \cdot 10^{-5}$	$1,29 \cdot 10^{-4}$
H_{16,3}	$8,23 \cdot 10^{-1}$	$6,51 \cdot 10^{-3}$	$-5,04 \cdot 10^{-3}$	$-6,42 \cdot 10^{-6}$	$-7,73 \cdot 10^{-5}$	$1,29 \cdot 10^{-4}$
H_{17,1}	$5,45 \cdot 10^{-2}$	$8,76 \cdot 10^{-3}$	$6,95 \cdot 10^{-3}$	$9,89 \cdot 10^{-6}$	$-2,74 \cdot 10^{-5}$	$-1,04 \cdot 10^{-4}$
H_{18,1}	$3,06 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$7,38 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-5}$	$-5,13 \cdot 10^{-5}$	$-7,94 \cdot 10^{-5}$
H_{18,2}	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$7,35 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-5}$	$-5,14 \cdot 10^{-5}$	$-7,92 \cdot 10^{-5}$
H_{18,3}	$3,22 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-5}$	$-5,14 \cdot 10^{-5}$	$-7,89 \cdot 10^{-5}$
H_{18,4}	$3,24 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$7,31 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-5}$	$-5,14 \cdot 10^{-5}$	$-7,88 \cdot 10^{-5}$
H_{19,1}	$3,68 \cdot 10^{-1}$	$1,67 \cdot 10^{-3}$	$1,54 \cdot 10^{-2}$	$-1,70 \cdot 10^{-5}$	$-1,54 \cdot 10^{-6}$	$-1,25 \cdot 10^{-4}$
H_{20,1}	$5,64 \cdot 10^{-1}$	$3,75 \cdot 10^{-3}$	$-1,66 \cdot 10^{-2}$	$-2,63 \cdot 10^{-5}$	$-4,59 \cdot 10^{-6}$	$4,76 \cdot 10^{-4}$
H_{21,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$2,01 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-5}$	$-3,58 \cdot 10^{-4}$	$-4,84 \cdot 10^{-6}$
H_{22,1}	$3,59 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$5,76 \cdot 10^{-3}$	$8,35 \cdot 10^{-5}$	$-2,03 \cdot 10^{-4}$	$-7,94 \cdot 10^{-5}$
H_{23,1}	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$4,71 \cdot 10^{-3}$	$4,39 \cdot 10^{-5}$	$-3,24 \cdot 10^{-4}$	$-3,66 \cdot 10^{-5}$
H_{24,1}	$-2,87 \cdot 10^{-1}$	$1,47 \cdot 10^{-3}$	$5,44 \cdot 10^{-2}$	$-2,88 \cdot 10^{-5}$	$-1,29 \cdot 10^{-6}$	$-6,14 \cdot 10^{-4}$
H_{25,1}	$3,65 \cdot 10^{-1}$	$5,92 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$5,36 \cdot 10^{-5}$	$-2,89 \cdot 10^{-5}$	$-2,78 \cdot 10^{-4}$
H_{26,1}	$8,02 \cdot 10^{-1}$	$-2,02 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^{-3}$	$3,53 \cdot 10^{-4}$	$-8,48 \cdot 10^{-5}$	$-5,05 \cdot 10^{-5}$
H_{26,2}	$8,02 \cdot 10^{-1}$	$-2,02 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^{-3}$	$3,53 \cdot 10^{-4}$	$-8,48 \cdot 10^{-5}$	$-5,05 \cdot 10^{-5}$

$H_{27,1}$	$-7,51 \cdot 10^{-2}$	$6,04 \cdot 10^{-2}$	$3,96 \cdot 10^{-3}$	$-1,20 \cdot 10^{-4}$	$-8,13 \cdot 10^{-4}$	$-1,14 \cdot 10^{-5}$
$H_{28,1}$	$7,27 \cdot 10^{-1}$	$2,14 \cdot 10^{-3}$	$5,59 \cdot 10^{-3}$	$5,22 \cdot 10^{-5}$	$-2,05 \cdot 10^{-5}$	$-1,04 \cdot 10^{-4}$

Os dados relativos aos custos das usinas termelétricas são apresentados na Tabela 40. Os coeficiente f^0 , f^1 e f^2 compõem o custo quadrático de operação, (19), linearizado conforme descrito na seção 3.2.2. O coeficiente f^3 representa o custo de partida da usina. Da mesma maneira que as hidrelétricas, cada usina pertence a um ou mais dos sistemas de teste da Tabela 4.

Tabela 40: Dados de custo das usinas termelétricas.

	f^0	f^1	f^2	f^3	Sist.
T₁	$1,57 \cdot 10^3$	$4,71 \cdot 10^2$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^4$	A,C
T₂	$1,61 \cdot 10^3$	$3,49 \cdot 10^2$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^4$	A
T₃	$1,58 \cdot 10^3$	$3,44 \cdot 10^2$	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^4$	A
T₄	$1,57 \cdot 10^3$	$4,03 \cdot 10^2$	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^4$	A
T₅	$1,56 \cdot 10^3$	$4,14 \cdot 10^2$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^4$	A
T₆	$1,57 \cdot 10^3$	$4,46 \cdot 10^2$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^4$	A
T₇	$1,60 \cdot 10^3$	$5,05 \cdot 10^2$	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^4$	A
T₈	$1,58 \cdot 10^3$	$4,36 \cdot 10^2$	$1,22 \cdot 10^{-2}$	$1,13 \cdot 10^4$	A
T₉	$1,60 \cdot 10^3$	$3,86 \cdot 10^2$	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^4$	A,C
T₁₀	$1,58 \cdot 10^3$	$4,45 \cdot 10^2$	$9,69 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^4$	A,E
T₁₁	$1,61 \cdot 10^3$	$4,53 \cdot 10^2$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^4$	A
T₁₂	$1,56 \cdot 10^3$	$4,69 \cdot 10^2$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^4$	A
T₁₃	$1,58 \cdot 10^3$	$5,01 \cdot 10^2$	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^4$	A
T₁₄	$1,57 \cdot 10^3$	$4,38 \cdot 10^2$	$9,61 \cdot 10^{-3}$	$1,39 \cdot 10^4$	A
T₁₅	$6,14 \cdot 10^2$	$5,30 \cdot 10^1$	$5,62 \cdot 10^{-1}$	$9,09 \cdot 10^2$	B
T₁₆	$5,87 \cdot 10^2$	$5,20 \cdot 10^1$	$5,55 \cdot 10^{-1}$	$8,70 \cdot 10^2$	B
T₁₇	$6,12 \cdot 10^2$	$5,70 \cdot 10^1$	$5,59 \cdot 10^{-1}$	$9,71 \cdot 10^2$	B
T₁₈	$6,05 \cdot 10^2$	$5,90 \cdot 10^1$	$3,56 \cdot 10^{-1}$	$9,87 \cdot 10^2$	B
T₁₉	$6,09 \cdot 10^2$	$5,70 \cdot 10^1$	$3,45 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^3$	B,C
T₂₀	$1,13 \cdot 10^3$	$1,52 \cdot 10^2$	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$6,10 \cdot 10^3$	B,C
T₂₁	$7,80 \cdot 10^3$	$7,90 \cdot 10^1$	$9,00 \cdot 10^{-2}$	$5,00 \cdot 10^1$	B,D
T₂₂	$5,87 \cdot 10^2$	$5,60 \cdot 10^1$	$5,58 \cdot 10^{-1}$	$8,84 \cdot 10^2$	B
T₂₃	$6,00 \cdot 10^2$	$5,70 \cdot 10^1$	$5,65 \cdot 10^{-1}$	$8,56 \cdot 10^2$	B
T₂₄	$5,79 \cdot 10^2$	$6,20 \cdot 10^1$	$5,67 \cdot 10^{-1}$	$8,82 \cdot 10^2$	B
T₂₅	$5,78 \cdot 10^2$	$6,80 \cdot 10^1$	$5,58 \cdot 10^{-1}$	$8,04 \cdot 10^2$	B
T₂₆	$5,99 \cdot 10^2$	$6,20 \cdot 10^1$	$5,53 \cdot 10^{-1}$	$8,70 \cdot 10^2$	B
T₂₇	$5,98 \cdot 10^2$	$5,60 \cdot 10^1$	$5,66 \cdot 10^{-1}$	$8,61 \cdot 10^2$	B
T₂₈	$5,80 \cdot 10^2$	$5,40 \cdot 10^1$	$5,52 \cdot 10^{-1}$	$8,47 \cdot 10^2$	B
T₂₉	$1,12 \cdot 10^3$	$1,60 \cdot 10^2$	$3,88 \cdot 10^{-2}$	$5,03 \cdot 10^3$	C,E
T₃₀	$1,60 \cdot 10^3$	$3,26 \cdot 10^2$	$9,40 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^4$	C
T₃₁	$1,60 \cdot 10^3$	$4,02 \cdot 10^2$	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$1,53 \cdot 10^4$	C,E

T ₃₂	1,58·10 ³	3,77·10 ²	1,20·10 ⁻²	1,52·10 ⁴	C,E
T ₃₃	1,61·10 ³	3,87·10 ²	9,74·10 ⁻³	1,21·10 ⁴	C,E
T ₃₄	1,60·10 ³	3,49·10 ²	1,07·10 ⁻²	1,08·10 ⁴	C
T ₃₅	2,09·10 ³	1,19·10 ²	5,60·10 ⁻¹	1,61·10 ³	D
T ₃₆	5,98·10 ³	3,96·10 ¹	3,87·10 ⁻¹	1,95·10 ³	D
T ₃₇	1,84·10 ³	5,27·10 ¹	5,92·10 ⁻¹	2,35·10 ³	D
T ₃₈	9,60·10 ³	7,30·10 ¹	8,90·10 ⁻²	1,50·10 ²	D
T ₃₉	1,50·10 ³	1,40·10 ¹	1,40·10 ⁻²	1,25·10 ³	D
T ₄₀	1,50·10 ³	1,35·10 ¹	3,50·10 ⁻³	2,10·10 ³	D,E
T ₄₁	1,60·10 ³	4,27·10 ²	9,60·10 ⁻³	1,21·10 ⁴	E

As demais informações das termelétricas, como limites de geração, tempos mínimos de permanência em e fora de operação bem como as rampas de incremento e decrémento são apresentadas na Tabela 41.

Tabela 41: Dados das usinas termelétricas.

	pt^{\min}	pt^{\max}	t^{down}	t^{up}	Δ^{down}	Δ^{up}		pt^{\min}	pt^{\max}	t^{down}	t^{up}	Δ^{down}	Δ^{up}
	(MW)	(MW)	(h)	(h)	(MW)	(MW)		(MW)	(MW)	(h)	(h)	(MW)	(MW)
T ₁	471	1196	13	15	162	175	T ₂₂	56	111	2	2	144	160
T ₂	349	982	13	17	141	136	T ₂₃	57	114	2	2	141	153
T ₃	344	952	14	13	125	139	T ₂₄	62	115	2	2	169	148
T ₄	403	1109	17	14	157	150	T ₂₅	68	129	2	2	164	160
T ₅	414	1078	15	14	147	161	T ₂₆	62	115	2	2	148	163
T ₆	446	1162	17	18	152	155	T ₂₇	56	102	2	2	147	125
T ₇	505	1273	15	15	171	189	T ₂₈	54	101	2	2	121	127
T ₈	436	1201	17	15	148	173	T ₂₉	160	362	8	8	50	48
T ₉	386	989	15	12	124	147	T ₃₀	326	919	15	13	131	128
T ₁₀	445	1157	13	15	157	161	T ₃₁	402	1121	18	18	149	145
T ₁₁	453	1187	16	16	151	157	T ₃₂	377	984	17	18	119	133
T ₁₂	469	1249	12	16	176	187	T ₃₃	387	1055	15	16	131	131
T ₁₃	501	1326	18	13	195	195	T ₃₄	349	984	17	13	134	134
T ₁₄	438	1113	15	17	161	136	T ₃₅	12	132	4	6	50	70
T ₁₅	53	102	2	2	145	139	T ₃₆	25	262	5	8	60	75
T ₁₆	52	103	2	2	154	126	T ₃₇	20	100	10	20	50	50
T ₁₇	57	113	2	2	145	168	T ₃₈	80	670	1	1	100	250
T ₁₈	59	114	2	2	170	158	T ₃₉	70	657	9	9	150	180
T ₁₉	57	106	2	3	154	141	T ₄₀	125	1350	9	9	200	250
T ₂₀	152	347	8	10	46	48	T ₄₁	427	1201	16	15	169	159
T ₂₁	65	638	2	2	150	250							

Os dados das linhas são apresentados na Tabela 42, com informações de qual para qual barra a linha está conectada e com o valor da reatância das linhas, x , em p.u., com uma base de potência de 100 MVA.

Tabela 42: Dados das linhas de transmissão.

	de	para	rx		de	para	rx		de	para	rx
L ₁	3	4	$1,61 \cdot 10^{-2}$	L ₃₃	17	23	$2,35 \cdot 10^{-2}$	L ₆₆	31	32	$1,18 \cdot 10^{-1}$
L ₂	3	4	$1,61 \cdot 10^{-2}$	L ₃₄	17	36	$5,90 \cdot 10^{-3}$	L ₆₇	31	32	$1,18 \cdot 10^{-1}$
L ₃	3	4	$1,70 \cdot 10^{-2}$	L ₃₅	18	17	$1,24 \cdot 10^{-2}$	L ₆₈	31	38	$2,68 \cdot 10^{-1}$
L ₄	3	6	$1,21 \cdot 10^{-2}$	L ₃₆	18	17	$1,23 \cdot 10^{-2}$	L ₆₉	32	9	$1,29 \cdot 10^{-1}$
L ₅	3	6	$1,26 \cdot 10^{-2}$	L ₃₇	18	17	$1,23 \cdot 10^{-2}$	L ₇₀	32	10	$4,49 \cdot 10^{-2}$
L ₆	4	20	$1,82 \cdot 10^{-2}$	L ₃₈	18	44	$2,06 \cdot 10^{-2}$	L ₇₁	32	11	$7,44 \cdot 10^{-2}$
L ₇	4	20	$2,62 \cdot 10^{-2}$	L ₃₉	20	19	$1,16 \cdot 10^{-2}$	L ₇₂	32	11	$7,41 \cdot 10^{-2}$
L ₈	5	2	$1,05 \cdot 10^{-2}$	L ₄₀	20	19	$1,17 \cdot 10^{-2}$	L ₇₃	32	37	$1,19 \cdot 10^{-1}$
L ₉	6	19	$4,40 \cdot 10^{-3}$	L ₄₁	20	33	$9,78 \cdot 10^{-2}$	L ₇₄	32	41	$4,84 \cdot 10^{-2}$
L ₁₀	7	8	$7,40 \cdot 10^{-3}$	L ₄₂	20	33	$9,70 \cdot 10^{-2}$	L ₇₅	32	41	$4,64 \cdot 10^{-2}$
L ₁₁	7	30	$2,43 \cdot 10^{-2}$	L ₄₃	21	22	$3,04 \cdot 10^{-2}$	L ₇₆	34	33	$1,05 \cdot 10^{-1}$
L ₁₂	13	5	$6,54 \cdot 10^{-3}$	L ₄₄	21	22	$3,04 \cdot 10^{-2}$	L ₇₇	34	33	$5,85 \cdot 10^{-2}$
L ₁₃	13	6	$2,55 \cdot 10^{-2}$	L ₄₅	21	45	$8,18 \cdot 10^{-2}$	L ₇₈	34	33	$5,78 \cdot 10^{-2}$
L ₁₄	13	17	$2,05 \cdot 10^{-2}$	L ₄₆	22	39	$2,08 \cdot 10^{-1}$	L ₇₉	34	33	$1,27 \cdot 10^{-1}$
L ₁₅	13	19	$2,69 \cdot 10^{-2}$	L ₄₇	23	24	$9,16 \cdot 10^{-3}$	L ₈₀	35	1	$1,41 \cdot 10^{-2}$
L ₁₆	13	30	$2,01 \cdot 10^{-2}$	L ₄₈	23	29	$3,03 \cdot 10^{-2}$	L ₈₁	36	17	$4,55 \cdot 10^{-3}$
L ₁₇	14	3	$2,83 \cdot 10^{-1}$	L ₄₉	23	21	$2,76 \cdot 10^{-2}$	L ₈₂	38	37	$1,18 \cdot 10^{-1}$
L ₁₈	14	13	$1,21 \cdot 10^{-2}$	L ₅₀	23	21	$2,76 \cdot 10^{-2}$	L ₈₃	38	37	$1,31 \cdot 10^{-1}$
L ₁₉	14	40	$1,57 \cdot 10^{-1}$	L ₅₁	24	25	$3,43 \cdot 10^{-3}$	L ₈₄	38	37	$1,26 \cdot 10^{-1}$
L ₂₀	14	40	$1,57 \cdot 10^{-1}$	L ₅₂	26	28	$2,97 \cdot 10^{-2}$	L ₈₅	38	37	$5,98 \cdot 10^{-2}$
L ₂₁	15	17	$2,92 \cdot 10^{-2}$	L ₅₃	26	28	$2,97 \cdot 10^{-2}$	L ₈₆	39	12	$4,61 \cdot 10^{-2}$
L ₂₂	15	19	$1,60 \cdot 10^{-2}$	L ₅₄	26	34	$1,87 \cdot 10^{-1}$	L ₈₇	39	43	$7,78 \cdot 10^{-2}$
L ₂₃	16	15	$1,15 \cdot 10^{-2}$	L ₅₅	28	27	$6,01 \cdot 10^{-2}$	L ₈₈	39	43	$7,77 \cdot 10^{-2}$
L ₂₄	16	15	$1,16 \cdot 10^{-2}$	L ₅₆	28	27	$6,01 \cdot 10^{-2}$	L ₈₉	40	43	$1,59 \cdot 10^{-1}$
L ₂₅	16	15	$1,28 \cdot 10^{-2}$	L ₅₇	28	27	$6,01 \cdot 10^{-2}$	L ₉₀	42	5	$7,00 \cdot 10^{-3}$
L ₂₆	16	27	$3,28 \cdot 10^{-2}$	L ₅₈	28	38	$2,76 \cdot 10^{-1}$	L ₉₁	42	8	$1,17 \cdot 10^{-2}$
L ₂₇	16	27	$3,28 \cdot 10^{-2}$	L ₅₉	29	25	$3,55 \cdot 10^{-2}$	L ₉₂	45	41	$1,20 \cdot 10^{-1}$
L ₂₈	16	32	$1,94 \cdot 10^{-1}$	L ₆₁	29	36	$9,20 \cdot 10^{-3}$	L ₉₃	46	24	$1,22 \cdot 10^{-2}$
L ₂₉	16	33	$6,56 \cdot 10^{-2}$	L ₆₂	29	42	$2,17 \cdot 10^{-2}$	L ₉₄	46	24	$1,14 \cdot 10^{-2}$
L ₃₀	16	33	$6,56 \cdot 10^{-2}$	L ₆₃	30	35	$1,39 \cdot 10^{-2}$	L ₉₅	46	24	$1,22 \cdot 10^{-2}$
L ₃₁	16	37	$1,31 \cdot 10^{-1}$	L ₆₄	30	35	$1,45 \cdot 10^{-2}$				
L ₃₂	17	15	$3,91 \cdot 10^{-2}$	L ₆₅	30	42	$1,94 \cdot 10^{-2}$				

As condições iniciais das usinas hidrelétricas, Tabela 43, Tabela 44 e Tabela 45, compostos pelo volume meta, em hm^3 , de cada usina e três condições iniciais de volume inicial: alto ($v_{0,a}$), médio ($v_{0,m}$) e baixo ($v_{0,b}$). Os valores dos níveis iniciais dos reservatórios são apresentados em razão do volume meta. Por exemplo, para a hidrelétrica H₈ do sistema A, o volume inicial alto é igual a $1,04318 \cdot 3.808 = 3.972,43 \text{ hm}^3$. Vale destacar que, para manter a coerência nos resultados, o valor das metas

de volume foram definidas com base em testes para cada sistema, com o objetivo de se aproximar de situações reais, evitando que o custo total de operação seja nulo.

Tabela 43: Condições iniciais das hidrelétricas dos sistemas A e B.

A					B				
	ν^{meta}	$\nu_{0,a}$	$\nu_{0,m}$	$\nu_{0,b}$		ν^{meta}	$\nu_{0,a}$	$\nu_{0,m}$	$\nu_{0,b}$
H₈	3.808	1,04318	1,02879	1,01439	H₁	3.877	1,01104	1,00736	0,99961
H₉	1.399	1,00842	1,00561	1,00281	H₂	2.756	1,00158	1,00106	0,99964
H₁₀	2.812	1,02820	1,01880	1,00940	H₃	300	1,00983	1,00655	1,00000
H₁₁	4.700	1,01277	1,00851	1,00426	H₄	33	1,00173	1,00115	1,00000
H₁₂	887	1,11871	1,07914	1,03957	H₅	4.719	1,00981	1,00654	1,00032
H₁₃	139	1,01269	1,00846	1,00423	H₆	1.036	1,00191	1,00127	1,00000
H₁₄	1.513	1,00005	1,00003	1,00002	H₇	3.293	1,00191	1,00128	0,99909

Tabela 44: Condições iniciais das hidrelétricas do sistema C.

C									
	v^{meta}	$v_{0,a}$	$v_{0,m}$	$v_{0,b}$		v^{meta}	$v_{0,a}$	$v_{0,m}$	$v_{0,b}$
H₁	3.877	1,04908	1,01896	1,01380	H₆	1.036	1,00849	1,00193	0,99421
H₂	2.756	1,00704	1,00145	0,99601	H₇	3.293	1,00850	0,99909	0,99302
H₃	300	1,04367	1,01667	0,99667	H₁₂	887	1,07914	1,02830	1,00902
H₄	33	1,00769	1,00308	0,99692	H₁₃	139	1,00846	1,00187	0,99467
H₅	4.719	1,04358	1,00032	0,97489	H₁₄	1.513	1,00003	1,00002	0,99980

Tabela 45: Condições iniciais das hidrelétricas dos sistemas D e E.

D					E				
	v^{meta}	$v_{0,a}$	$v_{0,m}$	$v_{0,b}$		v^{meta}	$v_{0,a}$	$v_{0,m}$	$v_{0,b}$
H ₁	3.877	1,01472	1,01104	1,00736	H ₁₅	500	1,03000	1,01400	1,00000
H ₂	2.756	1,00211	1,00158	1,00106	H ₁₆	8	1,04938	1,02469	1,00000
H ₃	300	1,01310	1,00983	1,00655	H ₁₇	266	1,00320	1,00159	1,00000
H ₄	33	1,00231	1,00173	1,00115	H ₁₈	3.102	1,01854	1,00887	1,00000
H ₅	4.719	1,01308	1,00981	1,00654	H ₁₉	416	1,01502	1,00901	1,00000
H ₆	1.036	1,00255	1,00191	1,00127	H ₂₀	2.144	1,00770	1,00303	1,00000
H ₇	3.293	1,00255	1,00191	1,00128	H ₂₁	1.000	1,01000	1,00500	1,00000
H ₈	3.808	1,00864	1,00648	1,00432	H ₂₂	140	1,00714	1,00357	1,00000
H ₉	1.399	1,00168	1,00126	1,00084	H ₂₃	90	1,00398	1,00176	1,00000
H ₁₀	2.812	1,00564	1,00423	1,00282	H ₂₄	11	1,00440	1,00162	1,00000
H ₁₁	4.700	1,00255	1,00191	1,00128	H ₂₅	53	1,01102	1,00910	1,00000
H ₁₂	887	1,02374	1,01781	1,01187	H ₂₆	355	1,01408	1,00563	1,00000
H ₁₃	139	1,00254	1,00190	1,00127	H ₂₇	11	1,10000	1,08182	1,00000
H ₁₄	1.513	1,00001	1,00001	1,00001	H ₂₈	18	1,11260	1,04607	1,00000

Por sua vez, as condições iniciais das termelétricas são apresentadas na Tabela 46 e Tabela 47, em que pf_0 é o nível de geração,

em MW, da usina na hora anterior ao início do planejamento, u_0 é o seu estado operativo (1 = ligada ou 0 = desligada) e ua é a quantidade de horas em que a usina está no estado operativo u_0 .

Tabela 46: Condições iniciais das termelétricas dos sistemas A, B e C.

A				B				C			
	pf_0	u_0	ua		pf_0	u_0	ua		pf_0	u_0	ua
T ₁	0	0	20	T ₁₅	0	0	20	T ₁	0	0	20
T ₂	349	1	15	T ₁₆	52	1	20	T ₉	0	0	20
T ₃	0	0	15	T ₁₇	0	0	20	T ₁₉	0	0	20
T ₄	0	0	15	T ₁₈	0	0	20	T ₂₀	152	1	20
T ₅	0	0	15	T ₁₉	0	0	20	T ₂₉	0	0	20
T ₆	0	0	15	T ₂₀	0	0	20	T ₃₀	0	0	20
T ₇	505	1	15	T ₂₁	65	1	20	T ₃₁	0	0	20
T ₈	0	0	15	T ₂₂	0	0	20	T ₃₂	0	0	20
T ₉	0	0	15	T ₂₃	0	0	20	T ₃₃	387	1	20
T ₁₀	0	0	15	T ₂₄	0	0	20	T ₃₄	0	0	20
T ₁₁	453	1	15	T ₂₅	68	1	20				
T ₁₂	0	0	15	T ₂₆	0	0	20				
T ₁₃	0	0	15	T ₂₇	0	0	20				
T ₁₄	438	1	15	T ₂₈	0	0	20				

Tabela 47: Condições iniciais das termelétricas dos sistemas D e E.

D				E			
	pf_0	u_0	ua		pf_0	u_0	ua
T ₂₁	0	0	20	T ₁₀	0	0	20
T ₃₅	0	0	20	T ₂₉	0	0	20
T ₃₆	25	1	20	T ₃₁	0	0	20
T ₃₇	0	0	20	T ₃₂	0	0	20
T ₃₈	80	1	20	T ₃₃	387	1	20
T ₃₉	0	0	20	T ₄₀	125	1	20
T ₄₀	125	1	20	T ₄₁	427	1	20

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACKOOIJ, W. VAN. Decomposition approaches for block-structured chance-constrained programs with application to hydro-thermal unit commitment. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 80, n. 3, p. 227–253, 23 ago. 2014.
- ACKOOIJ, W. VAN. A comparison of four approaches from stochastic programming for large-scale unit-commitment. **EURO Journal on Computational Optimization**, p. 1–29, 17 set. 2015.
- ACKOOIJ, W. VAN; MALICK, J. **Decomposition algorithm for large-scale two-stage unit commitment**. France: hal-01145653, 24 abr. 2015.
- AHMED, S. *et al.* Two-Stage Stochastic Integer Programming: A Brief Introduction. In: **Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science**. [s.l.] John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- AL-AGTASH, S.; RENJENG, S. Augmented Lagrangian approach to hydro-thermal scheduling. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 13, n. 4, p. 1392–1400, 1998.
- ANEEL. **Capacidade de Geração do Brasil**. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br>>. Acesso em: 9 nov. 2015.
- ARARIPE NETO, T. DE A. *et al.* **Comparison of Stochastic and Deterministic Approaches in Hydrothermal Generation Scheduling**. In: IFAC ELECTRICAL ENERGY SYSTEM. 1985
- ARISTIZÁBAL, J. D. C. **Técnicas de Dualidade e Programação Não-linear Inteira-mista Aplicadas ao Programa Diário da Operação Eletroenergética**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- BACAUD, L. *et al.* Bundle methods in stochastic optimal power management: a disaggregated approach using preconditioners. **Computational Optimization and Applications**, v. 20, p. 227–244, 2001.
- BAPTISTELLA, L. F. B.; GEROMEL, J. C. Decomposition approach to problem of unit commitment schedule for hydrothermal systems. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings D**, v. 127, n. 6, p. 250–258, 1980.
- BAZARAA, M. S.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. New York: John Wiley & Sons, 1979. v. 1
- BELLMAN, R. **Dynamic Programming**. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957.

- BELLONI, A. *et al.* Bundle Relaxation and Primal Recovery in Unit Commitment Problems. The Brazilian Case. **Annals of Operations Research**, v. 120, n. 1–4, p. 21–44, 1 abr. 2003.
- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, p. 238–252, 1962.
- BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Second ed. [s.l.] Athena Scientific, 1999.
- BIRGE, J. R. The value of the stochastic solution in stochastic linear programs with fixed recourse. **Mathematical Programming**, v. 24, n. 1, p. 314–325, 1982.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. 2nd. ed. [s.l.: s.n.].
- BONNANS, J. F. *et al.* **Numerical Optimization Theoretical and Practical Aspects**. 2. ed. [s.l.] Springer, 2006.
- BORGHETTI, A. *et al.* Lagrangian heuristics based on disaggregated Bundle methods for hydrothermal unit commitment. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 18, n. 1, p. 313–323, 2003.
- CARØE, C. C.; SCHULTZ, R. **A Two-Stage Stochastic Program for Unit Commitment under Uncertainty in a Hydro-Thermal Power System**. Berlin, Germany: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1997.
- CARPENTIER, P. *et al.* Stochastic optimization of unit commitment: a new decomposition framework. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 2, p. 1067–1073, 1996.
- C. YUEN, A. P. Handling Infeasibilities when Applying Benders Decomposition to Scheduling Optimization. 2006.
- CEPEL. **Projeto NEWAVE - Manual do Usuário**. Rio de Janeiro, RJ: [s.n.].
- CEPEL. **Modelo DECOMP - Manual do Usuário**. Rio de Janeiro, RJ: [s.n.].
- CHAO-AN, L. *et al.* Hydro unit commitment in hydro-thermal optimization. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 12, n. 2, p. 764–769, 1997.
- CHUN-LUNG, C. Optimal Wind-Thermal Generating Unit Commitment. **Energy Conversion, IEEE Transactions on**, v. 23, n. 1, p. 273–280, 2008.
- CONSTANTINESCU, E. M. *et al.* A Computational Framework for Uncertainty Quantification and Stochastic Optimization in Unit Commitment With Wind Power Generation. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 26, n. 1, p. 431–441, 2011.

- CORCHERO, C.; MIJANGOS, E.; HEREDIA, F.-J. A new optimal electricity market bid model solved through perspective cuts. **TOP**, v. 21, n. 1, p. 84–108, 24 nov. 2011.
- DANIILIDIS, A.; LEMARÉCHAL, C. On a primal-proximal heuristic in discrete optimization. **Mathematical Programming**, v. 104, n. 1, p. 105–128, 14 mar. 2005.
- DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. Decomposition principle for linear programs. **Operations Research**, v. 8, n. 1, p. 101–111, 1960.
- Desafios na Operação do SIN – 2015/2018**. . In: XVI ENCONTRO NACIONAL DOS CONSELHOS DE CONSUMIDORES DE ENERGIA ELÉTRICA. Brasília, 21 nov. 2014. Disponível em: <www.aneel.gov.br/arquivos/ppt/ONS.pptx>. Acesso em: 9 nov. 2015
- DINIZ, A. L. **Uma Estratégia de Decomposição por Relaxação Lagrangeana para a Otimização da Programação Diária da Operação de Sistemas Hidrotérmicos com Modelagem Detalhada da Rede Elétrica - Aplicação ao Sistema Brasileiro**. Tese de Doutorado—Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2007.
- DINIZ, A. L.; SAGASTIZABAL, C.; MACEIRA, M. E. P. **Assessment of Lagrangian Relaxation with Variable Splitting for Hydrothermal Scheduling**. . In: POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING, 2007. IEEE. 24 jun. 2007
- DINIZ, A. L.; SANTOS, T. N.; MACEIRA, M. E. P. **Short Term Security Constrained Hydrothermal Scheduling Considering Transmission Losses**. 2006 IEEE/PES Transmission Distribution Conference and Exposition: Latin America. **Anais...** In: 2006 IEEE/PES TRANSMISSION DISTRIBUTION CONFERENCE AND EXPOSITION: LATIN AMERICA. ago. 2006
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical Programming**, v. 91, n. 2, p. 201–213, jan. 2002.
- DUBOST, L.; GONZALEZ, R.; LEMARÉCHAL, C. A primal-proximal heuristic applied to the French Unit-commitment problem. **Mathematical Programming**, v. 104, n. 1, p. 129–151, 2005.
- ENCINA, A. S. A. *et al.* Unit Commitment of Hydro Dominated Systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 9, n. 4, 2008.
- ENNES, M. I.; DINIZ, A. L. An efficient equivalent thermal cost function model for nonlinear mid-term hydrothermal generation planning. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 63, p. 705–712, dez. 2014.

- ESMAEELI, S. M.; KAZEMI, A. **Stochastic unit commitment of wind farms based on mixed-integer linear formulation**. . In: INNOVATIVE SMART GRID TECHNOLOGIES (ISGT), 2012 IEEE PES. 16 jan. 2012
- FARHAT, I. A.; EL-HAWARY, M. E. Optimization methods applied for solving the short-term hydrothermal coordination problem. **Electric Power Systems Research**, v. 79, n. 9, p. 1308–1320, 2009.
- FELTENMARK, S.; KIWIEL, K. C. Dual applications of proximal bundle methods, including Lagrangian relaxation of nonconvex problems. 1998.
- FERREIRA, L. A. F. M. *et al.* Short-term resource scheduling in multi-area hydrothermal power systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 200–212, 1989.
- FINARDI, E. C. **Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas em Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Relaxação Lagrangeana e Programação Quadrática Seqüencial**. Tese de Doutorado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- FINARDI, E. C.; SILVA, E. .; SAGASTIZÁBAL, C. Solving the Unit Commitment Problem of Hydropower Plants via Lagrangian Relaxation and Sequential Quadratic Programming. **Computational & Applied Mathematics**, v. 24, n. 3, p. 317–341, 2005.
- FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 21, n. 2, p. 835–844, 2006.
- FLETEN, S.-E.; KRISTOFFERSEN, T. K. Short-term hydropower production planning by stochastic programming. **Computers & Operations Research**, v. 35, n. 8, p. 2656–2671, 2008.
- FORTUNATO, L. A. M. *et al.* **Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica**. Niterói: Universidade Federal Fluminense, EDUFF, 1990.
- FRANGIONI, A. Generalized Bundle Methods. **SIAM Journal on Optimization**, v. 13, n. 1, p. 117–156, 2002.
- FRANGIONI, A. About Lagrangian Methods in Integer Optimization. **Annals of Operations Research**, v. 139, n. 1, p. 163–193, 1 out. 2005.
- FRANGIONI, A. **Generator of UC**. [s.l.: s.n.].
- FRANGIONI, A.; GENTILE, C. Perspective cuts for a class of convex 0–1 mixed integer programs. **Mathematical Programming**, v. 106, n. 2, p. 225–236, 14 jul. 2005.
- FRANGIONI, A.; GENTILE, C.; LACALANDRA, F. Solving unit commitment problems with general ramp constraints. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 30, n. 5, p. 316–326, 2008.

- FRANGIONI, A.; GENTILE, C.; LACALANDRA, F. Tighter Approximated MILP Formulations for Unit Commitment Problems. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 24, n. 1, p. 105–113, 2009.
- FRANGIONI, A.; GENTILE, C.; LACALANDRA, F. Sequential Lagrangian-MILP approaches for Unit Commitment problems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 33, n. 3, p. 585–593, 2011.
- FRANGIONI, A.; GORGONE, E. **Generalized Bundle Methods for Sum-Functions with “Easy” Components: Applications to Multicommodity Network Design**. [s.l.] Optimization Online - eprints for the optimization community, 2011. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2011/06/3049.html>.
- FRANGIONI, A.; GORGONE, E. Bundle methods for sum-functions with “easy” components: applications to multicommodity network design. **Mathematical Programming**, v. 145, n. 1–2, p. 133–161, 1 jun. 2014.
- GEOFFRION, A. M. Generalized Benders decomposition. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 10, n. 4, p. 237–260, out. 1972.
- GONÇALVES, R. E. C. *et al.* Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-term operation planning problem. **Computational & Applied Mathematics**, v. 30, p. 289–313, 2011.
- GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v. 83, n. 1, p. 19–27, 2012.
- GRÖWE-KUSKA, N. *et al.* Power Management in a Hydro-Thermal System under Uncertainty by Lagrangian Relaxation. In: GREENGARD, C.; RUSZCZYNSKI, A. (Eds.). **Decision Making Under Uncertainty**. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. [s.l.] Springer New York, 2002. v. 128p. 39–70.
- GRÖWE-KUSKA, N.; RÖMISCH, W. Stochastic Unit Commitment in Hydrothermal Power Production Planning. In: **Applications of Stochastic Programming**. [s.l.: s.n.]. p. 633–653.
- GUIGNARD, M. Lagrangean Relaxation. **Top - Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research**, v. 11, n. 2, p. 151–228, 2003.
- GUIGNARD, M.; KIM, S. Lagrangean decomposition for integer programming: Theory and applications. **RAIRO. Recherche Opérationnelle**, v. 21, p. 307–323, 1987a.

- GUIGNARD, M.; KIM, S. Lagrangean decomposition: A model yielding stronger lagrangean bounds. **Mathematical Programming**, v. 39, n. 2, p. 215–228, 1 jun. 1987b.
- GUROBI OPTIMIZATION, I. Gurobi Optimizer Reference Manual. <http://www.gurobi.com>, 2015.
- HABIBOLLAHZADEH, H.; BUBENKO, J. A. Application of Decomposition Techniques to Short-Term Operation Planning of Hydrothermal Power System. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 1, n. 1, p. 41–47, 1986.
- HEREDIA, F. J.; NABONA, N. Optimum short-term hydrothermal scheduling with spinning reserve through network flows. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 10, n. 3, p. 1642–1651, 1995.
- HINOJOSA, V. H.; LEYTON, C. Short-term hydrothermal generation scheduling solved with a mixed-binary evolutionary particle swarm optimizer. **Electric Power Systems Research**, v. 92, n. 0, p. 162–170, 2012.
- HOUZHONG, Y.; LUH, P. B.; LAN, Z. **Scheduling of hydrothermal power systems using the augmented Lagrangian decomposition and coordination technique**. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1994. 29 jul. 1994
- HYDROBYTE. **HydroData XP**. [s.l: s.n.].
- IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. CT253. Disponível em: <<http://www-03.ibm.com/software/products/pt/ibmilogcpleoptistud>>. Acesso em: 21 set. 2015.
- JIANG, Q.; ZHOU, B.; ZHANG, M. Parallel Augment Lagrangian Relaxation Method for Transient Stability Constrained Unit Commitment. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 28, n. 2, p. 1140–1148, 2013.
- JÖRNSTEN, K. O.; NÄSBERG, M.; SMEDS, P. A. **Variable splitting: A new Lagrangean relaxation approach to some mathematical programming models**. Sweden: Universitetet i Linköping/Tekniska Högskolan i Linköping. Department of Mathematics, 1985.
- KADOWAKI, M. *et al.* **Short-term hydropower scheduling via an optimization-simulation decomposition approach**. In: POWERTECH, 2009 IEEE BUCHAREST. 28 jun. 2009
- KIWIEL, K. C. Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. **Mathematical Programming**, v. 46, p. 105–122, 1990.
- KLIGERMAN, A. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotérmicos interligados utilizando programação dinâmica estocástica dual**.

- Dissertação de Mestrado—Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, 1992.
- LAND, A. H.; DOIG, A. G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. **Econometrica**, v. 28, n. 3, p. 497–520, 1960.
- LARROYD, P. V. **Comparação de Políticas com Aversão a Risco para o Planejamento da Operação Hidrotérmica de Médio Prazo**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- LEMARÉCHAL, C. *et al.* Bundle Method Applied to the unit-commitment problem. 1995.
- LEMARÉCHAL, C. *et al.* Bundle methods applied to the unit-commitment problem. In: DOLEŽAL, J.; FIDLER, J. (Eds.). . **System Modelling and Optimization**. IFIP — The International Federation for Information Processing. [s.l.] Springer US, 1996. p. 395–402.
- LEMARÉCHAL, C. Lagrangian Relaxation. In: JÜNGER, M.; NADDEF, D. (Eds.). . **Computational Combinatorial Optimization**. Lecture Notes in Computer Science. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2001. p. 112–156.
- MACEIRA, M. E. P. *et al.* **Chain of Optimization Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System**. . In: 14TH POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. Sevilla: 24 jun. 2002
- MACEIRA, M. E. P. *et al.* **Ten years of application of stochastic dual dynamic programming in official and agent studies in Brazil—Description of the NEWAVE program**. . In: 16TH POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. Glasgow: 14 jul. 2008
- MATOS, V. L.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. Comparison Between the Use of Energy Equivalent Reservoirs per Subsystem and per Cascade in the Long Term Operational Planning in Brazil. **International Conference on Engineering Optimization**, 2008.
- MITRA, S. Scenario Generation for Stochastic Programming. **OptiRisk Systems: White Paper Series**, 2008.
- MME. **Plano Decenal de Expansão de Energia 2023**. [s.l.: s.n.].
- MORALES-ESPAÑA, G.; GENTILE, C.; RAMOS, A. Tight MIP formulations of the power-based unit commitment problem. **OR Spectrum**, v. 37, n. 4, p. 929–950, 23 maio 2015.
- MORALES-ESPAÑA, G.; LATORRE, J. M.; RAMOS, A. Tight and Compact MILP Formulation for the Thermal Unit Commitment Problem. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 28, n. 4, p. 4897–4908, 2013a.

- MORALES-ESPAÑA, G.; LATORRE, J. M.; RAMOS, A. Tight and Compact MILP Formulation of Start-Up and Shut-Down Ramping in Unit Commitment. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 2, p. 1288–1296, maio 2013b.
- MOURA, P. S.; ALMEIDA, A. T. DE. Large Scale Integration of Wind Power Generation. In: PARDALOS, P. M. *et al.* (Eds.). . **Handbook of Power Systems I. Energy Systems**. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 95–119.
- NAYAK, N.; RAJAN, C. C. Hydro-thermal Commitment Scheduling by Tabu Search Method with Cooling-Banking Constraints. In: PANIGRAHI, B. *et al.* (Eds.). . **Swarm, Evolutionary, and Memetic Computing**. Lecture Notes in Computer Science. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2010. v. 6466p. 739–752.
- NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Hydro unit start-up costs and their impact on the short term scheduling strategies of Swedish power producers. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 12, n. 1, p. 38–44, 1997.
- NOWAK, M. P. **A fast descent method for the hydro storage subproblem in power generation**. [s.l.] International Institute for Applied Systems Analysis, 1996.
- NOWAK, M. P.; SCHULTZ, R.; WESTPHALEN, M. A Stochastic Integer Programming Model for Incorporating Day-Ahead Trading of Electricity into Hydro-Thermal Unit Commitment. **Optimization and Engineering**, v. 6, n. 2, p. 163–176, 2005.
- NOWAK, M.; RÖMISCH, W. Stochastic Lagrangian Relaxation Applied to Power Scheduling in a Hydro-Thermal System under Uncertainty. **Annals of Operations Research**, v. 100, n. 1–4, p. 251–272, 1 dez. 2000.
- NÜRNBERG, R.; RÖMISCH, W. A Two-Stage Planning Model for Power Scheduling in a Hydro-Thermal System Under Uncertainty. **Optimization and Engineering**, v. 3, n. 4, p. 355–378, 1 dez. 2002.
- OLIVEIRA, W.; SAGASTIZÁBAL, C.; SCHEIMBERG, S. Inexact Bundle Methods for Two-Stage Stochastic Programming. **SIAM Journal on Optimization**, v. 21, n. 2, p. 517–544, 1 abr. 2011.
- ÖZALTIN, O.; PROKOPYEV, O.; SCHAEFER, A. Two-stage quadratic integer programs with stochastic right-hand sides. **Mathematical Programming**, v. 133, n. 1–2, p. 121–158, 1 jun. 2012.
- PALOMAR, D. P.; MUNG, C. A tutorial on decomposition methods for network utility maximization. **Selected Areas in Communications, IEEE Journal on**, v. 24, n. 8, p. 1439–1451, 2006.

- PAPAVASILIOU, A.; OREN, S. S. Multiarea Stochastic Unit Commitment for High Wind Penetration in a Transmission Constrained Network. **Operations Research**, v. 61, n. 3, p. 578–592, 2013.
- PAPAVASILIOU, A.; OREN, S. S.; O'NEILL, R. P. Reserve Requirements for Wind Power Integration: A Scenario-Based Stochastic Programming Framework. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 26, n. 4, p. 2197–2206, 2011.
- PAPPALA, V. S. *et al.* A Stochastic Model for the Optimal Operation of a Wind-Thermal Power System. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 24, n. 2, p. 940–950, 2009.
- PENG, X.; JIRUTITIJAROEN, P. **Stochastic unit commitment using multi-cut decomposition algorithm with partial aggregation**. . In: POWER AND ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING, 2011 IEEE. 24 jul. 2011
- PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 161–169, 1989.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v. PAS-101, n. 10, p. 3851–3860, 1982.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Application of Decomposition Techniques to the Mid - and Short - Term Scheduling of Hydrothermal Systems. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v. PAS-102, n. 11, p. 3611–3618, 1983.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. **Water Resources Research**, v. 21, n. 6, p. 779–792, 1985.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. **Aplicação de Técnicas de Decomposição ao Pré-Despacho de Sistemas Hidrotérmicos**. . In: SNPTEE. 1987
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v. 52, n. 1–3, p. 359–375, 1 maio 1991.
- PHILPOTT, A. B.; CRADDOCK, M.; WATERER, H. Hydro-electric unit commitment subject to uncertain demand. **European Journal of Operational Research**, v. 125, n. 2, p. 410–424, 2000.
- PING, C.; LIXIN, T. **Stochastic Unit Commitment with CO2 Emission Trading in the Deregulated Market Environment**. . In: POWER AND ENERGY ENGINEERING CONFERENCE (APPEEC), 2010 ASIA-PACIFIC. 28 mar. 2010

- PINTO, R. J. *et al.* **Metodologia para aplicação de processamento paralelo no planejamento de curto-prazo (modelo decomp)**. . In: XX SNPTEE SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA. Recife: 22 nov. 2009
- REDONDO, N. J.; CONEJO, A. J. Short-term hydro-thermal coordination by Lagrangian relaxation: solution of the dual problem. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 14, n. 1, p. 89–95, 1999.
- ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, R. J.-B. Scenarios and Policy Aggregation in Optimization Under Uncertainty. **Mathematics of Operations Research**, v. 16, n. 1, p. 119–147, 1 fev. 1991.
- RODRIGUES, R. N. **Um modelo para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos baseado em relaxação lagrangeana**. Tese de Doutorado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- RODRIGUES, R. N.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. **Solving The Hydrothermal Unit Commitment Problem Via Lagrangian Relaxation and Augmented Lagrangian**. . In: 16 TH POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. Conference Proceedings, 2008
- RÖMISCH, W.; VIGERSKE, S. Recent Progress in Two-stage Mixed-integer Stochastic Programming with Applications to Power Production Planning. In: PARDALOS, P. M. *et al.* (Eds.). . **Handbook of Power Systems I**. Energy Systems. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 177–208.
- ROY, T. Cross decomposition for mixed integer programming. **Mathematical Programming**, v. 25, n. 1, p. 46–63, 1 jan. 1983.
- RUZIC, S.; RAJAKOVIC, N.; VUCKOVIC, A. A flexible approach to short-term hydro-thermal coordination. I. Problem formulation and general solution procedure. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 3, p. 1564–1571, 1996.
- RUZIC, S.; VUCKOVIC, A.; RAJAKOVIC, N. A flexible approach to short-term hydro-thermal coordination. II. Dual problem solution procedure. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 3, p. 1572–1578, 1996.
- SAGASTIZÁBAL, C. Divide to conquer: decomposition methods for energy optimization. **Mathematical Programming**, v. 134, n. 1, p. 187–222, 24 jun. 2012.
- SALAM, M. S.; NOR, K. M.; HAMDAM, A. R. Hydrothermal scheduling based Lagrangian relaxation approach to hydrothermal coordination. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 13, n. 1, p. 226–235, 1998.

- SANTOS, T. .; DINIZ, A. L. **Feasibility and optimality cuts for the MultiStage benders decomposition approach: Application to the network constrained hydrothermal scheduling**. IEEE Power Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. **Anais...** In: IEEE POWER ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING, 2009. PES '09. jul. 2009
- SANTOS, M. L. L. DOS *et al.* Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 31, n. 9, p. 546–552, 2009.
- SARAVANAN, B. *et al.* A solution to the unit commitment problem—a review. **Frontiers in Energy**, v. 7, n. 2, p. 223–236, 2 abr. 2013.
- SCHULTZ, R. Stochastic programming with integer variables. **Mathematical Programming**, v. 97, n. 1–2, p. 285–309, 1 jul. 2003.
- SCHULTZ, R.; STOUGIE, L.; VAN DER VLERK, M. H. Two-stage stochastic integer programming: a survey. **Statistica Neerlandica**, v. 50, n. 3, p. 404–416, 1996.
- SEN, S. Algorithms for Stochastic Mixed-Integer Programming Models. In: K. AARDAL, G. L. N.; WEISMANTEL, R. (Eds.). **Handbooks in Operations Research and Management Science**. [s.l.] Elsevier, 2005. v. Volume 12p. 515–558.
- SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. B. **A Tutorial on Stochastic Programming**. Disponível em: <<http://stoprog.org/SPTutorial/SPTutorial.php>>. Acesso em: 11 jun. 2015.
- SHAW, J. J.; GENDRON, R. F.; BERTSEKAS, D. P. Optimal Scheduling of Large Hydrothermal Power Systems. **Power Engineering Review, IEEE**, v. PER-5, n. 2, p. 32–32, 1985.
- SHERALI, H. D.; FRATICELLI, B. M. P. A modification of Benders' decomposition algorithm for discrete subproblems: An approach for stochastic programs with integer recourse. **Journal of Global Optimization**, v. 22, n. 1–4, p. 319–342, jan. 2002.
- SHERALI, H. D.; ZHU, X. Two-Stage Stochastic Mixed-Integer Programs: Algorithms and Insights. In: MATHEMATICS, A. IN M. AND (Ed.). **Advances in Applied Mathematics and Global Optimization**. 1st. ed. [s.l.] Springer Series, 2009. v. 17.
- SHIINA, T.; BIRGE, J. R. Stochastic unit commitment problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 11, n. 1, p. 19–32, 2004.
- SIAHKALI, H.; VAKILIAN, M. Stochastic unit commitment of wind farms integrated in power system. **Electric Power Systems Research**, v. 80, n. 9, p. 1006–1017, 2010.

- SIFUENTES, W.; VARGAS, A. Short-term hydrothermal coordination considering an AC network modeling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 29, n. 6, p. 488–496, 2007.
- SILVA, E. L. **Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica**. 2. ed. ed. Florianópolis: Edição do Autor, 2012.
- SILVA, E. L. DA; FINARDI, E. C. Parallel processing applied to the planning of hydrothermal systems. **Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on**, v. 14, n. 8, p. 721–729, 2003.
- SOKKAPPA, B. G. Optimum Scheduling of Hydrothermal Systems - A Generalized Approach. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v. 82, n. 65, p. 97–104, 1963.
- STOTT, B.; MARINHO, J. L. Linear Programming for Power-System Network Security Applications. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-98, n. 3, p. 837–848, maio 1979.
- TAHANAN, M. *et al.* Large-scale Unit Commitment under uncertainty. **4OR**, v. 13, n. 2, p. 115–171, 31 jan. 2015.
- TAKIGAWA, F. Y. K. **Desenvolvimento de um modelo computacional para o problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos**. Tese de Doutorado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- TAKIGAWA, F. Y. K. *et al.* Solving the hydrothermal scheduling problem considering network constraints. **Electric Power Systems Research**, v. 88, n. 0, p. 89–97, 2012.
- TAKRITI, S.; BIRGE, J. R.; LONG, E. A stochastic model for the unit commitment problem. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 3, p. 1497–1508, 1996.
- TAKTAK, R.; D’AMBROSIO, C. **An Overview on Mathematical Programming Approaches for the Deterministic Unit Commitment Problem in Hydro Valleys**. Optimization Online. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2015/02/4786.html>. Acesso em: 23 set. 2015.
- TONG, S. K.; SHAHIDEHPOUR, S. M. Hydrothermal unit commitment with probabilistic constraints using segmentation method. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 5, n. 1, p. 276–282, 1990.
- TSENG, C.-L. *et al.* A transmission-constrained unit commitment method in power system scheduling. **Decision Support Systems**, v. 24, n. 3–4, p. 297–310, jan. 1999.
- VAN DEN BERGH, K.; DELAURE, E.; D’HAESSELLER, W. **DC power flow in unit commitment models**. [s.l.] KU Leuven Energy Institute, maio 2014. Disponível em: <https://www.mech.kuleuven.be/en/tme/research/energy_environment/P

ublicationsEnergyandenvironment/Journalpapers>. Acesso em: 27 nov. 2015.

VAN DER VLERK, M. H. **Stochastic Integer Programming Bibliography**. Disponível em: <<http://www.eco.rug.nl/mally/biblio/sip.html>>.

VAN SLYKE, R.; WETS, R. L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 17, n. 4, p. 638–663, 1969.

VENKATESH, B. *et al.* Fuzzy MILP Unit Commitment Incorporating Wind Generators. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 23, n. 4, p. 1738–1746, 2008.

VIRMANI, S. *et al.* Implementation of a Lagrangian relaxation based unit commitment problem. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 4, n. 4, p. 1373–1380, 1989.

VISWESWARAN, V. Decomposition Techniques for MILP: Lagrangian Relaxation. In: SCIENCE, S. (Ed.). . **Encyclopedia of Optimization**. Segunda Edição ed. [s.l.: s.n.].

WANG, J. *et al.* Stochastic unit commitment with sub-hourly dispatch constraints. **Applied Energy**, v. 105, n. 0, p. 418–422, 2013.

WATSON, J.-P.; WOODRUFF, D. Progressive hedging innovations for a class of stochastic mixed-integer resource allocation problems. **Computational Management Science**, v. 8, n. 4, p. 355–370, 1 nov. 2011.

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. **Power generation, operation, and control**. [s.l.] John Wiley & Sons, 1984.

XIAOHONG, G. *et al.* An optimization-based algorithm for scheduling hydrothermal power systems with cascaded reservoirs and discrete hydro constraints. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 12, n. 4, p. 1775–1780, 1997.

XIONG, P.; JIRUTITIJAROEN, P. **Convergence acceleration techniques for the stochastic unit commitment problem**. . In: PROBABILISTIC METHODS APPLIED TO POWER SYSTEMS (PMAPS), 2010 IEEE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON. 14 jun. 2010

YAN, H.; LUH, P. B.; ZHANG, L. Scheduling of Hydrothermal Power Systems Using the Augmented Lagrangian Decomposition and Coordination Technique. **American Control Conference**, 1994.

ZHAO, C.; GUAN, Y. Unified Stochastic and Robust Unit Commitment. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 28, n. 3, p. 3353–3361, 2013.

ZHENG, Q. P. *et al.* A decomposition approach to the two-stage stochastic unit commitment problem. **Annals of Operations Research**, v. 210, n. 1, p. 387–410, 11 jan. 2013.

ZHENG, Q. P.; WANG, J.; LIU, A. L. Stochastic Optimization for Unit Commitment: A Review. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 30, n. 4, p. 1913–1924, jul. 2015.